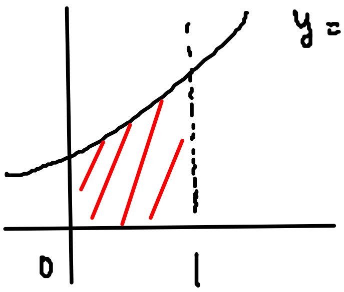
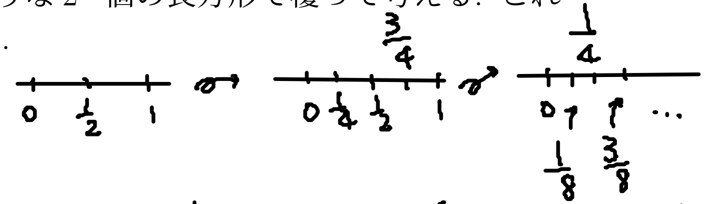
微分積分学 II 演習 2008. Oct. 10.

問題 1.

(1) $y = e^x$, $x = 0, 1$ および y 軸で囲まれた図形の面積 S を計算したい. そのためにこの図形を区間 $[0, 1]$ を 2^n 等分したものを底辺とし, 高さが $e^{k/2^n}$, $(k = 1, \ldots, 2^n)$ であるような 2^n 個の長方形で覆って考える. これら長方形の面積の総和を求めよ.





上のように分割したときの k番目の区域の右端は

$$e^{k/2^n}$$

求める長方形の面積の総和は

$$\sum_{k=1}^{2^n} e^{k/2^n}\left(\frac{k}{2^n}-\frac{k-1}{2^n}\right) = \sum_{k=1}^{2^n} e^{k/2^n}\cdot\frac{1}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} e^{\frac{k}{2^n}} = \frac{1}{2^n}\left(e^{\frac{1}{2^n}} + e^{\frac{2}{2^n}} + e^{\frac{3}{2^n}} + \cdots + e^{\frac{2^n}{2^n}}\right)$$

初項 $e^{\frac{1}{2^n}}$

公比 $e^{\frac{1}{2^n}}$

の等比級数

$$= \frac{1}{2^n}\,\frac{1-e^{\frac{2^n}{2^n}}}{1-e^{\frac{1}{2^n}}}\cdot e^{\frac{1}{2^n}}$$

(2) S を求めよ.

定義より $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}\,\frac{1-e}{1-e^{\frac{1}{2^n}}}\cdot e^{\frac{1}{2^n}}$

ここで $2^n = m$ とすると

$$\lim_{m\to\infty} m\cdot(1-e^{1/m}) = \lim_{t\to 0}\frac{1-e^t}{t} \quad (t=\tfrac{1}{m} \text{ とおいた.})$$

$$= -1$$

よって $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx = e-1.$

問題 2.

関数 $y = \mathrm{Arcsin}x$ の導関数を考えることで,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

を求めよ.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \qquad x = \sin y \quad \text{より}$$

$$= \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

これから

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \mathrm{Arcsin}\,1 - \mathrm{Arcsin}\,0$$

$$= \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \text{〃}$$