記号の確認.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ …… x 以外の変数を定数と思って微分する.

∂ … パーシャル, デル, ラウンド

$$\frac{\partial}{\partial x} x^m y^n = m x^{m-1} y$$

∂_x で $\dfrac{\partial}{\partial x}$ を代用することがある.

$$\partial_x \sin xy = y \cos xy$$

接平面.

関数 $z = f(x,y)$ のグラフの点 (x_0, y_0) における接平面とは

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$$

で定義される平面.

例1. $z = x^2 + y^2$ の点 $(0,0)$ における接平面は

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) + f(0,0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

より $z = 0$

2. $z = x^2 + y^2$, 点 $(2,1)$ の場合.

$$z = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)(y-1) + f(2,1)$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ は上の1と同じなので,

$$z = 4(x-2) + 2(y-1) + 5$$
$$= 4x + 2y - 5$$

3. $z = x^2 - y^2$, 点 $(0,0)$ の場合.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y$ より

$$z = 2 \cdot 0 \cdot (x-0) - 2 \cdot 0 \cdot (y-0) + 0^2 - 0^2$$
$$= 0$$

この例はもう少し詳しく見る.

$$\begin{cases} z = x^2 - y^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

xz平面

これを $y=0$ で切断してみる. 切り口に
あらわれる図形は 上の式に $y=0$ を代入した
ものなので

$$\begin{cases} z = x^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{この2つは}(0,0)\text{で接している.}$$

同様に $x=0$ での切り口は

$$\begin{cases} z = -y^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{やはり}(0,0)\text{で接している.}$$

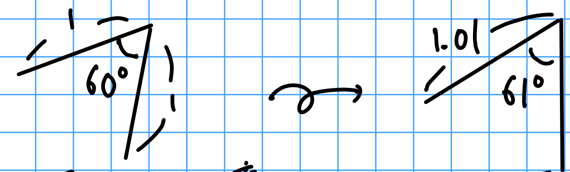
さて、接平面の定義式の右辺

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

は Taylor展開のはじめの方に一致していることに注意しよう.

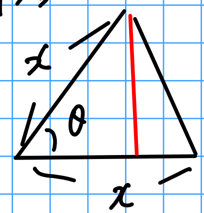
例題

一辺の長さ1の正3角形があったとする.
このうち 1つの角 と 2つのそれをはさむ辺



を上図のように変化させたとき, 面積はどれだけ変化するか?

解答



左の3角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot x \cdot x \sin\theta$$
$$= \frac{1}{2} x^2 \sin\theta$$

さて $f(x, \theta) = \frac{1}{2} x^2 \sin\theta$ とおき,
$(x, \theta) = (1, 60°)$ における接平面の右辺
を書くと $\partial f / \partial x = x \sin\theta$ $\quad \partial f / \partial \theta = \frac{1}{2} x^2 \cos\theta$

$$\frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}(x - 1) + \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

+ (テイラー展開の2階以上の微分の項)

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \cdots$$

↑ この部分が1辺長さ1の正3角形の面積

増えたのは

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(x-1) + \frac{1}{4}\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) + \underbrace{\cdots}_{\text{ここは無視できる.}}$$

$x = 1.01 \quad \theta = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{180}$

($x-1$, $\theta - \frac{\pi}{3}$ が微小のとき)

を代入すれば

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0.01 + \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$= 0.00865 \cdots$ ← 小数点以下~~2~~5位まで

$+ 0.00436$

$= 0.01301 \fallingdotseq 0.01$

無視した赤の部分の1つ. $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(1, \frac{\pi}{3}\right) \times (x-1)^2$

$= \frac{1}{2} 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0.01)^2$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} \times 0.0001$

$= -0.00008 \cdots$

問2. 今度は $f(x, \theta) = \frac{1}{2}x^2 \sin\theta$ の $(x, \theta) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ でのテイラー展開のはじめの3つの項 (= 接平面の式) を書くと, $\left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ を代入する前の式は

$$\frac{1}{2}x_0^2 \sin\theta_0 + x_0 \sin\theta_0 (x - x_0) + \frac{1}{2}x_0^2 \cos\theta_0 (\theta - \theta_0)$$

となるので $(x_0, \theta_0) = \left(2, \frac{\pi}{6}\right)$ を代入して

$$1 + (x-2) + \sqrt{3}\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$$

$x = 2.02 \qquad \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180}$ を代入して

$$1 + 0.02 + (1.73) \cdot \frac{\pi}{180}$$

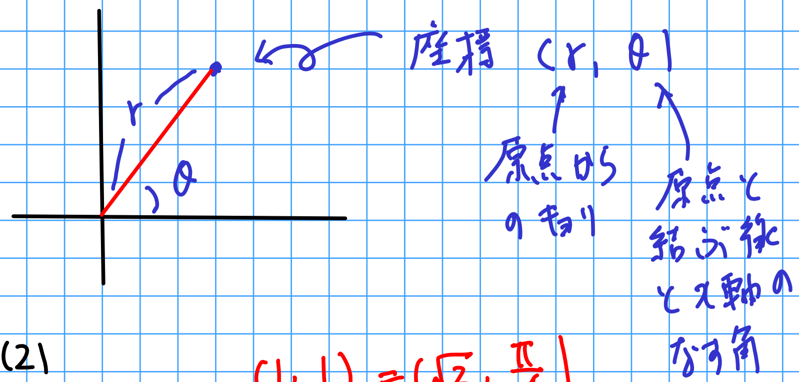
$= 1 + 0.02 + 0.0301$

よって 0.05 だけ増加する.

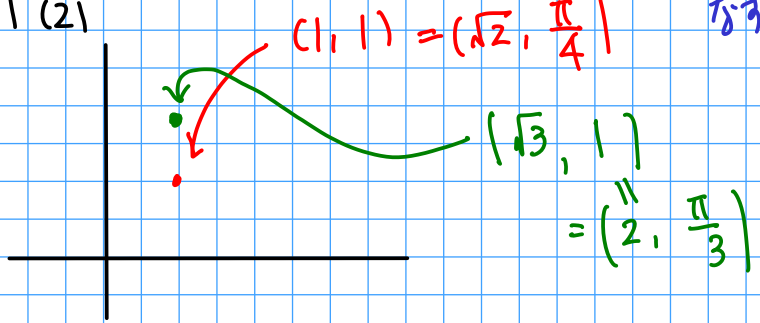
偏微分の変数変換

・極座標

平面の点の表し方として次のような
やり方がある。



問(2)



さて、 x, y で偏微分する。

r, θ 〃

の間にはどのような関係があるだろうか？

例 $\log r = \log \sqrt{x^2+y^2}$

公式

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

上の例で検証する

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{1}{r} \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0$ $\qquad \frac{\partial \theta}{\partial x}$ ← 計算の必要なし.

$$\text{右辺} = \frac{1}{r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \underline{\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y}}$$

補足.

2変数関数 $f(x,y)$ に対して

$$x \leftarrow x_0 + at \qquad y \leftarrow y_0 + bt$$

と代入することで t の関数 $f(x_0+at, y_0+bt)$ が得られる.

この関数 $f(x_0+at, y_0+bt)$ の t での微分を

計算すると,

$$\frac{df}{dt} = a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^nf}{dt^n} = \left(a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}\right)^n$$

となる. これを1変数のときのTaylor展開の

式に代入すれば2変数のTaylor展開の式を

得る.