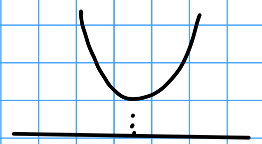
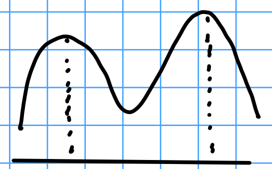
極値の定義

1変数の場合.



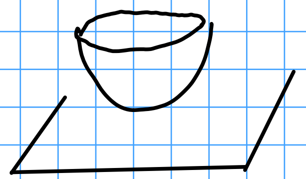
極小



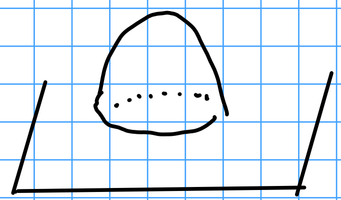
極大　最大.

極大, 極小とは そのまわりにくらべれば
最大, 最小となっている点,

2変数(以上)の場合.



極小



極大

例　$z = x^2 + y^2$　　　$z = -x^2 - y^2$

現実世界では 山脈の 山頂が (高さの意味で)
極大を与える.

極値の求め方

$z = f(x, y)$ の極値を求めるには

Step 1.

方程式　$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$　を解く

Step 2.

Step 1で 求めた 解 $(x, y) = (a, b)$ に対し,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = A$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = B$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = C$

を計算し

$AC - B^2 > 0$　極大 又は 極小

$AC - B^2 < 0$　極値ではない

$AC - B^2 = 0$　わからない.

(3階以上の偏導関数を
調べる必要がある.)

例　$z = (x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2}$　の極値
を 調べてみよう.

$z = (x^2 - y^2)e^{-x^2-y^2}$ に対して

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x e^{-x^2-y^2} + (x^2-y^2)(-2x e^{-x^2-y^2})$$

$$= 2x(1-x^2+y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y e^{-x^2-y^2} + (x^2-y^2)(-2y e^{-x^2-y^2})$$

$$= -2y(1+x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ を解くと,

$\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ となるのは, $x=0$ 又は $1-x^2+y^2=0$

$x=0$ のとき. $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y(1-y^2)e^{-x^2-y^2}$

$= 0$

よって $y=0$ 又は $y=\pm 1$

$1-x^2+y^2=0$ のとき $x^2 = 1+y^2$ より

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y(1+1+y^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$= -2y\cdot 2\cdot e^{-x^2-y^2}$$

よって $y=0$.

このとき $x^2=1$ より $x=\pm 1$

以上から $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ となるのは

$(x, y) = (0,0), (0,\pm 1), (\pm 1, 0)$

続いて2階の偏導関数を計算すると.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2\{(1-2x^2)(1-x^2+y^2) - 2x^2\}\Box$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy(x^2-y^2)\Box$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2\{2y^2 + (1-2y^2)(-1-x^2+y^2)\}\Box$$

$$\Box = e^{-x^2-y^2}$$

$(x,y) = (0,0)$ のとき. $A=2$ $B=0$ $C=-2$

$= (\pm 1, 0)$ のとき. $A = -4e^{-1}$, $B=0$, $C=-4e^{-1}$

$= (0,\pm 1)$ $A=4e^{-1}$, $B=0$, $C=4e^{-1}$

$$AC-B^2 \begin{cases} <0 & (x,y)=(0,0) \\ >0 & =(0,\pm 1), (\pm 1, 0) \end{cases}$$

以上より 極~~大~~小 … $(0, \pm 1)$

極~~小~~大 … $(\pm 1, 0)$

※ 最後に極大, 極小を判定するには.

$AC - B^2 > 0$ かつ A 又は $C > 0$

であれば 極小

$AC - B^2 > 0$ かつ A かつ $C < 0$

であれば 極大

例 $z = xy e^{-x^2-y^2}$ の極値を求めよ.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y e^{-x^2-y^2} - 2x^2 y e^{-x^2-y^2}$$

$$= y(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(1-2y^2)e^{-x^2-y^2}$$

より $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ の解は

$(x, y) = (0, 0)$ $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

又 $$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y\{-4x + (1-2x^2)(-2x)\}e^{-x^2-y^2}$$

$$= y(-6x + 4x^3)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1-2y^2)(1-2x^2)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x(-6y + 4y^3)e^{-x^2-y^2}$$

$(x, y) = (0, 0)$ のとき. $A = C = 0$ $B = 1$

$= \pm\left(1/\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $A = C = -2e^{-1}$ $B = 0$

$= \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $A = C = 2e^{-1}$ $B = 0$

以上から 極値は

極大 $(x, y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

極小 $(x, y) = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

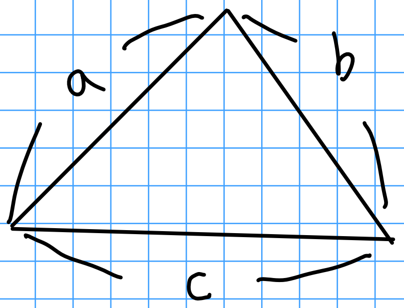
Lagrange の未定乗数法

微積分の最大の応用の1つに最大, 最小問題への応用があげられる.

問 周の長さが一定の3角形の中で面積が最大となるものは何か?

このようにある制限がついている中での最大，最小問題を解く1つの方法として Lagrangeの未定乗数法と呼ばれるやり方がある．

問の解答例



$a+b+c=2s$

とおくて，sは定数

すると3角形の面積は

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

(教科書 p71)

a,b,cを動かしたときの S^2 の最大値をもとめれば良い．すなわち

$$S=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

ただし $a+b+c-2s=0$

をみたしてa,b,cが動くときの最大値をもとめる．

さて，$S=S(a,b,c)$

$$g(a,b,c)=a+b+c-2s$$

とおく．すると

$S'=S-\lambda g$ の $\frac{\partial S'}{\partial a}=\frac{\partial S'}{\partial b}=\frac{\partial S'}{\partial c}=\frac{\partial S'}{\partial \lambda}=0$

をみたす (a,b,c) の値が最大値を与える (a,b,c) の候補となる．

$$\frac{\partial S'}{\partial a}=-s(s-b)(s-c)-\lambda \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial S'}{\partial b}=-s(s-a)(s-c)-\lambda \quad \cdots ②$$

$$\frac{\partial S'}{\partial c}=-s(s-a)(s-b)-\lambda \quad \cdots ③$$

$$\frac{\partial S'}{\partial \lambda}=a+b+c-2s \quad \cdots ④$$

①＝② より　$s-b=s-a \Rightarrow a=b$

②＝③　$s-c=s-b \Rightarrow b=c$

④＝0 より　$a=b=c=\frac{2}{3}s$

最大値の候補が1つなので最大となるのは $a=b=c$ のとき．

このように

最大、あるいは最小を求めたい関数を $F(x,y,z)$

変数の間の関係式 $g(x,y,z)=0$

このとき、最大又は最小の候補は

$F' = F - \lambda g$ という関数に対して

$$\frac{\partial F'}{\partial x} = \frac{\partial F'}{\partial y} = \frac{\partial F'}{\partial z} = \frac{\partial F'}{\partial \lambda} = 0$$

をみたす点 (x,y,z) となる。

例題

3辺が x, y, z である直方体がある。

この x, y, z を表面積が一定、すなわち

$$xy + yz + zx = 3$$

をみたして動かすとき、直方体の体積の最大値を求めよ。

解 $F(x,y,z) = xyz$

$g(x,y,z) = xy + yz + zx - 3$

$F' = F - \lambda g$ とおけば

$$\frac{\partial F'}{\partial x} = yz + \lambda(y+z) \quad \cdots ①$$

$$\frac{\partial F'}{\partial y} = xz + \lambda(x+z) \quad \cdots ②$$

$$\frac{\partial F'}{\partial z} = xy + \lambda(x+y) \quad \cdots ③$$

$$\frac{\partial F'}{\partial \lambda} = xy + yz + zx - 3 \quad \cdots ④$$

①=②より $z(x-y) + \lambda(x-y) = 0$

$\Leftrightarrow (z+\lambda)(x-y) = 0$

$x - y = 0$ 又は $z = -\lambda$

②=③より $x(y-z) + \lambda(y-z) = 0$

$\Leftrightarrow (x+\lambda)(y-z) = 0$

$y - z = 0$ 又は $x = -\lambda$

③=①より

$x - z = 0$ 又は $y = -\lambda$

これらの"又は"を考えると ~~最大値の候補は~~

~~x=y=z のときのみ.~~

$x=y=-\lambda$ のとき以外は $x=y=z$ となる。

$x=y=-\lambda$ の場合，

③ $=0 \iff \lambda^2-2\lambda^2=0$ より $\lambda=0$

となるが ④ が満たされないので不適。

よって最大値は $x=y=z$，すなわち

正立方体のときで ④ $=0$ より $x=y=z=1$.

又 体積は 3 〃

※ 極大，極小の判定について

$(x,y)=(a,b)$ に対して

$$\frac{\partial z}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial z}{\partial y}(a,b)=0$$

とする。このとき (a,b) のまわりの Taylor 展開は

$$f(x,y)=f(a,b)$$
$$+(x-a)^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(a,b)$$
$$+2(x-a)(y-b)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(a,b)$$
$$+(y-b)^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(a,b)$$
$$+\{(x-a),(y-b)\text{の3次以上の項}\}$$

$$A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\quad B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\quad C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

とおけば

$$f(x,y)\fallingdotseq f(a,b)+A(x-a)^2+2B(x-a)(y-b)+C(y-b)^2$$

$A>0$ または $C>0$ かつ $AC-B^2>0$ のとき

$$(\text{右辺})=f(a,b)+A\left\{(x-a)+\frac{B}{A}(y-b)\right\}^2+\frac{AC-B^2}{A}(y-b)^2$$

$$X=x-a+\frac{B}{A}(y-b)$$

$$Y=y-b$$

とすれば

$$(\text{右辺})=f(a,b)+AX^2+\frac{AC-B^2}{A}Y^2$$

となりこの X,Y の関数のグラフの形を考えれば (a,b) が極小であることがわかる。