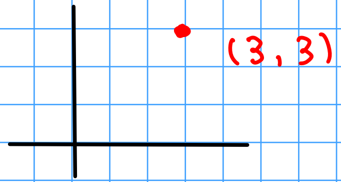
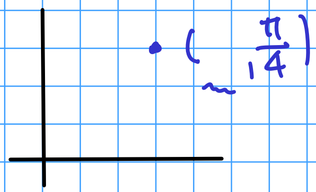
注意事項

8/1 4限 期末試験を受験できない
ものは 7/18 までに連絡を取ること.

先回の復習



(x, y) 座標系



(r, θ) 座標系
(極座標)

関数 $f(r,\theta)$ を x 又は y で偏微分
or
$f(x,y)$ を r 又は θ 〃

すると、以下の公式がある.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

例題 $f(r,\theta) = \log r^3$

$$\frac{\partial(\log r^3)}{\partial y} = \frac{\partial(\log r^3)}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial(\log r^3)}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= 3\cdot\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial r}{\partial y} + 0\cdot\frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$ より $\displaystyle\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

これを代入して

$$= \frac{3}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial(\log r^3)}{\partial x} = \frac{\partial(\log r^3)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial(\log r^3)}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

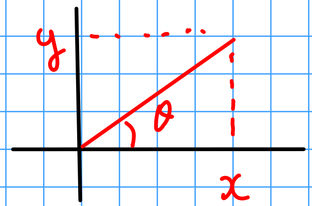
$$= \frac{3}{r}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 0\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

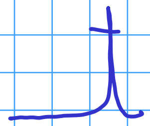
$$= \frac{3x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$= 0\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + 1\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

ここで $\theta = \mathrm{ArcTan}\,\dfrac{y}{x}$





$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

さて $\dfrac{d}{dt}\mathrm{Arctan}\, t$ を計算する.

$s = \mathrm{Arctan}\ t$ とすると

$$\frac{ds}{dt} = 1\Big/\frac{dt}{ds} = 1\Big/(\tan s)' = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 s}}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 s} = \frac{1}{1+t^2}$$

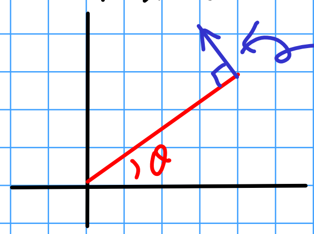
これから

$$\frac{\partial\, \mathrm{Arctan}\frac{y}{x}}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot -\frac{y}{x^2}$$

$$= \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{\partial\left(\mathrm{Arctan}\frac{y}{x}\right)}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

この結果は



$$\left(\frac{-y}{x^2+y^2},\ \frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$f(r,\theta)$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right\}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial f}{\partial\theta}\right\}\right]\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\theta}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial\theta}{\partial x}\right\}\right]$$

$$+$$

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\cdot\frac{\overset{\partial r}{\cancel{\partial\theta}}}{\partial x}\right]\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial\theta}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\cdot\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2}\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$$

$$+ \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$$

公式の証明

$\frac{\partial f}{\partial \theta}$, $\frac{\partial f}{\partial r}$ は連続とする.

まず平均値の定理を復習する.

$$f(r+r', \theta) - f(r, \theta)$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r}(r+tr', \theta)\cdot r'$$
$$0 < t < 1$$

この定理を使って以下のような極限を計算する.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(r(x+h, y), \theta(x+h, y)) - f(r(x,y), \theta(x,y))}{h}$$

上の式の分子

$$= f(r(x+h, y), \theta(x+h, y)) - f(r(x+h, y)\ \theta(x, y))$$
$$+ f(r(x+h, y), \theta(x, y)) - f(r(x, y), \theta(x, y))$$

と変形し, その一部を平均値の定理を使って変形する. まず

$$r(x+h, y) - r(x, y) = \frac{\partial r}{\partial x}(x+th, y)h$$

としておいて, これを代入

$$f(r(x,y) + \frac{\partial r}{\partial x}(x+th, y)h, \theta(x\cancel{+h}, y))$$
$$- f(r(x,y), \theta(x\cancel{+h}, y))$$
$$= \frac{\partial f}{\partial r}(r(x,y) + t'\frac{\partial r}{\partial x}(x+\underbrace{th}_{\to 0}, y)\overset{h \to 0}{h})$$
$$\times \frac{\partial r}{\partial x}(x+\underbrace{th}_{\to 0}, y)h$$

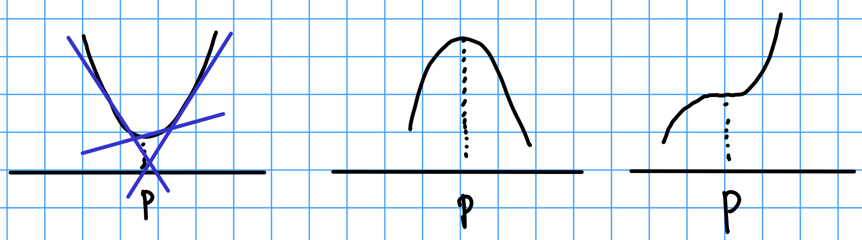
赤のhと分母が消しあうので, 上の式のhを取った部分でh→0とすると.

$$= \frac{\partial f}{\partial r}(r(x, y), \theta(x, y))\frac{\partial r}{\partial x}(x, y)$$

これが公式の後半部分. 前半部も同様に導ける.

連続性の仮定がない場合 教科書 p60.

多変数関数の極値.



$f'(p)=0$	$f'(p)=0$	$f'(p)=0$
$f''(p)>0$	$f''(p)<0$	$f''(p)=0$
極小	極大	極値ではない.

極値について考える前に2次曲面について考察する.

$$z = ax^2 + 2bxy + cy^2 \quad (a \neq 0)$$

$$= a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a}y^2$$

$ac-b^2 \neq 0$ のとき,

$$X = \sqrt{a}\left(x + \frac{b}{a}y\right) \qquad Y = \sqrt{\frac{ac-b^2}{a}}\,y$$

$a>0$ かつ $ac-b^2>0$

とおきかえると,

$$= X^2 + Y^2$$

$$X = \sqrt{-a}\left(x + \frac{b}{a}y\right) \qquad Y = \sqrt{-\frac{ac-b^2}{a}}\,\cancel{Y}\,y$$

$a<0$ 　 $ac-b^2>0$

$$= -X^2 - Y^2$$

その他のときも

$= -X^2 + Y^2$ (　　　　 aとき)

$= X^2 - Y^2$ ($a<0$, $ac-b^2>0$ のとき)

と変形できる. ここでは意図的に $ac-b^2=0$ の場合は考えていない.

グラフの形から考えて

X^2+Y^2 　 $(0,0)$ で 極小 ← $ac-b^2>0$

$-X^2-Y^2$ 　 〃 　 極大

X^2-Y^2, X^2+Y^2 　 極値ではない.

$ac-b^2<0$

例題

$z = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 - 2y^2$ の極値を求めよ.

解答. まず $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ を計算する.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 12xy^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + 12x^2y - 4y$$

$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ となる (x, y) を求めると,

$$(x, y) = (0, 0), (0, \pm 1)$$

点 $(0, 1)$ での Taylor 展開は

$$z = z(0,1) + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot x + \frac{\partial z}{\partial y}(y-1) + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} x(y-1) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y-1)^2 \right\} + \cdots$$

$$= -2 + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} x^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} x(y-1) + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y-1)^2 \right\} + \cdots$$

$$= -2 + 4x^2 + 2(y-1)^2 + \cdots$$

$(0, 1)$ のまわりで z のグラフは上の2次曲面で近似でき, 又上の2次曲面は先の場合分けで $a > 0$ $ac - b^2 > 0$ にあたり, 極小

$(0, -1)$ でも同様に極小

$(0, 0)$ は極大でも極小でもない.