復習

$f(x+a, y+b)$

$$= f(x,y) + \left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x,y)$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$$

$$+ \frac{1}{3!}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y)$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}\left(\underline{a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}}\right)^n f(x,y)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x+\theta a, y+\theta b)$$

$$(0<\theta<1$$

$f(x,y)$ が $n+1$ 回微分可能なとき、上記のように展開できる。ここで

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x,y)$$

$$= \left(a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) f(x,y)$$

例 $f(x,y) = e^{x+y}$ で計算してみよう。

$$\frac{\partial^{n+m}}{\partial x^n \partial y^m} e^{x+y} = \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left\{e^x\left(\frac{\partial^m}{\partial y^m} e^y\right)\right\}$$

$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$

これは y に関して定数

$$= \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^x \cdot e^y$$

$$= e^y \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^x$$

$$= e^y \cdot e^x = e^{x+y}$$

左の式に $x=y=0$ として代入すると、

$$(\text{左辺}) = e^{a+b}$$

$$(\text{右辺}) = e^{0+0} + ae^{0+0} + be^{0+0}$$

$$+ \frac{1}{2!}\left(a^2 e^{0+0} + 2ab\, e^{0+0} + b^2 e^{0+0}\right)$$

$$+ \cdots$$

$$= 1 + a + b + \frac{1}{2!}(a^2 + 2ab + b^2)$$
$$+ \frac{1}{3!}(a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3) + \cdots$$

例 $f(x, y) = \sin xy$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y \cos xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cos xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^2 \sin xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \begin{cases} \cos xy \\ -xy \sin xy \end{cases} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^2 \sin xy$$

これらを使って前頁の式に $x = y = 0$ を代入して計算すれば

$$f(x+a, y+b) = f(x,y) + a\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$
$$+ \frac{1}{2!}\left\{a^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) + b^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right\}$$
$$+ \cdots$$

$$\sin ab = 0 + a \cdot 0 + b \cdot 0$$
$$+ \frac{1}{2!}\left(a^2 \cdot 0 + 2ab \cdot 1 + b^2 \cdot 0\right)$$
$$+ \cdots$$
$$= ab + \cdots$$

計算を続ければ

$$\sin ab = ab - \frac{1}{3!}a^3b^3 + \frac{1}{5!}a^5 b^5 - \frac{1}{7!}a^7 b^7 \cdots$$

となる.

この項を出すには 6 回微分しなければならない.

注 Taylor展開は以下のようにも計算できる.

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5$$

※

$\sin xy$ の Taylor展開

= 上の式の x を xy におきかえたもの.

前の頁の計算は

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$

e^{x+y} の Taylor展開

= 上の式の x を xy におきかえたもの.

1変数関数の Taylor展開をうまく使うことで 2変数関数の Taylor展開を計算できることもある.

※何故このような計算で Taylor展開が計算出来るのかについては微分積分学III （級数入門 ）で履修する。

例3 $\cos xy$ を $(x,y)=(0,0)$ で Taylor展開
すると、

$$\cos x = 1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6\cdots$$

より

$$\cos ab = 1-\frac{1}{2!}a^2b^2+\frac{1}{4!}a^4b^4-\frac{1}{6!}a^6b^6\cdots$$

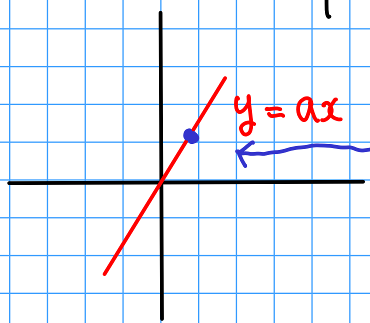
2変数関数の微分可能性と連続性

1) 連続性

関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で連続
とは

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$$

例 $$f(x,y) = \begin{cases} x/y & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \end{cases}$$



赤の線に沿って
$(x,y)\to(0,0)$
とすると

すると

$$\lim \frac{x}{y} = \lim \frac{x}{ax} = \lim \frac{1}{a} = \frac{1}{a}$$

a ,すなわち直線の傾きがかわるごとに
極限が異なる.

連続である, とはこのように近づける方向が
ちがえば異なる極限値を持つのではなく,
常に一定の極限を持つときを言う.
(教科書 p20, 26)

例 $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

とすると $f(x,y)$ は $(0,0)$ で偏微分可能だが
連続ではない ※

関数 $f(x,y)$ が $(x,y)=(a,b)$ で微分可能とは (p55)

ある定数 A, B があり

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{f(x,y)-f(a,b)-A(x-a)-B(y-b)}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

が存在するとき.

※$(x,y) = (t,2t)$ として極限をとると以下のように連続とならない.

$$\lim_{t\to 0} f(t,2t) = \frac{4}{5}$$

実質的な $f(x,y)$ の微分可能性

$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で 偏微分

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ が存在して、連続ならば

微分可能である。

拡張として

$f(x,y)$ は $(x,y)=(a,b)$ で $n+1$ 回

偏微分 $\left(\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^m \partial y^{n+1-m}} f(x,y)\right)$

が存在し、連続ならば、Taylor展開可能。

全微分。

関数 $f(x,y)$ に対して

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

を $f(x,y)$ の全微分と言う。

x や h に くらべて ゴミのように 小さい。

例題

底面の半径 r 高さ h の円柱があったとする。半径を2%、高さを1% 増やすと このとき、体積はどのくらい増えるか？

解答例.

$V=$(円柱の体積)$=\pi r^2 h$

これの $r=x$, $h=y$ での Taylor展開は

$$f(x+a,y+b)=f(x,y)+a\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)+b\frac{\partial}{\partial y}f(x,y)$$

$$\pi(x+a)^2(y+b) \qquad \pi x^2 y \quad +(a,b\ 2次以上の式)$$

$$=\pi x^2 y+2a\pi xh+b\pi x^2$$
$$+(a,b\ 2次以上の式)$$

整理しなおすと、

$$\pi(x+a)^2(y+b)=\pi x^2 y+2a\pi xh+b\pi x^2$$
$$+(ゴミ)$$

a,b の2次式 今 $a=0.02x$

$b=0.01h$ なので $a^2=\frac{4x^2}{10000}$

$a = 0.02x,\quad b = 0.01y$ を代入すれば

$$\pi(x+a)^2(y+b) - \pi x^2 y$$
$$= 2\cdot 0.02x \cdot \pi xy + 0.01y\cdot \pi x^2$$
$$= (0.04 + 0.01)\pi x^2 y$$
$$= (0.05)\cdot \pi x^2 y$$

すなわち 5% 増える.

問題 (2).

角柱の体積 $V(x,y) = x^2y$ $\left\{\begin{array}{ll} x & \text{一辺の長さ} \\ y & \text{高さ} \end{array}\right.$

$$V(x+a, y+b) = V(x,y) + a\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) + b\frac{\partial}{\partial y}V(x,y) + \cdots$$
$$= x^2y + a\cdot 2xy + bx^2 + (a,b\ \text{2次以上})$$

今 $a = 0.01x$ $b = 0.02y$ なので

$$\fallingdotseq \underbrace{x^2y + 0.02x^2y + 0.0\cancel{1}2\,x^2y}_{=(1.0\cancel{3}4)x^2y}$$

すなわち 4 ~~3~~% 増える.

以上からわかるように a, b が小さいときは

$$V(x+a, y+b) - V(x,y)$$

は $a\frac{\partial}{\partial x}V(x,y) + b\frac{\partial}{\partial y}V(x,y)$

だけ変化していると思って良い.

すなわち変化量は Taylor展開の1階微分で決る.

全微分 = Taylor展開の1階微分の項の a, b を微小量を表す意味で dx, dy におきかえたもの.