テストのコメント（問3に関して）

① $\log(1-x)$ を $x=0$ のまわりでテイラー展開すると，

$$\log(1-x) = -\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)$$

$x=1$ を代入すれば，

$$\text{右辺} = -1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cdots$$
$$= -\infty$$

つまり，$x=1$ では Taylor展開は意味をなさない．どのような x に対しても Taylor展開が意味を持つわけではない．

又，$\log x$ を $x=0$ のまわりで展開することはできない．

② $\left(\dfrac{5^x+3^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ の log を取り

$$\frac{1}{x}\log\left(\frac{5^x+3^x}{2}\right)$$

$$5^x = 1+x(\log 5)+\frac{1}{2}x^2(\log 5)^2+\cdots$$
$$3^x = 1+x(\log 3)+\frac{1}{2}x^2(\log 3)^2+\cdots$$

これと

$$\log(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\cdots$$

を組みあわせると，

$$\frac{5^x+3^x}{2} = 1+x\cdot\frac{1}{2}(\log 5+\log 3) + x^2\cdot\frac{1}{4}\{(\log 5)^2+(\log 3)^2\} + \cdots$$

$$\log\left(\frac{5^x+3^x}{2}\right) = x\cdot\frac{1}{2}(\log 5+\log 3) + x^2\cdot\frac{1}{4}\{(\log 5)^2+(\log 3)^2\} + \cdots - \frac{1}{2}[\text{上の式}]^2 + \frac{1}{3}[\text{上の式}]^3 \cdots$$

上の式を x で割って $x\to 0$ とすると $\frac{1}{2}\log 15$

期末テスト …… 8/1

都合が悪い場合，連絡を取ること．

matusita@math.sci.hokudai.ac.jp

偏微分

2変数関数 $f(x,y)$ において x 又は y を定数と思って y 又は x で微分することを偏微分という。

例

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin xy = y\cos xy$$

y 定数とみて x で微分

$$\frac{\partial}{\partial y}\sin xy = x\cos xy$$

x 定数とみて y で微分

同様に

$$\frac{\partial}{\partial x}\cos xy = -y\sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\cos xy = -x\sin xy$$

$$\frac{\partial}{\partial x}x^y = y\cdot x^{y-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}x^y = x^y\log x$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\cos xy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos xy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-y\sin xy\right) = -y^2\cos xy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}\cos xy = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\cos xy\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-y\sin xy\right) = -\sin xy - xy\cos xy$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\cos xy = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\cos xy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x\sin xy\right) = -\sin xy - xy\cos xy$$

偏微分の定義は次のようになる.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x,y)}{h}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x,y)}{h}$$

さて,偏微分を利用することで,多変数関数の平均値の定理,Taylor展開が書き下せる.

期末では多変数関数のTaylor展開の計算は必ず出題する.

平均値の定理を書くために,関数 $f(x,y)$ に対して

$$F(t) = f(x+at, y+bt)$$

と定義する. すると $F(t)$ の微分 $F'(t)$ は

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+a(t+h), y+b(t+h)) - f(x+at, y+bt)}{h}$$

$\{F(t+h) - F(t)\}/h$ を書き下したもの.

この式の分子を

$f(x+a(t+h), y+b(t+h)) - f(x+at, y+b(t+h))$

$f(x+at, y+b(t+h)) - f(x+at, y+bt)$

の部分を計算

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+a(t+h), y+b(t+h)) - f(x+at, y+b(t+h))}{h}$$

$$= a \frac{\partial f}{\partial x}(x+at, y+bt)$$

残りは

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+at, y+b(t+h)) - f(x+at, y+bt)}{h}$$

$$= b \frac{\partial f}{\partial y}(x+at, y+bt)$$

よって

$$F'(t) = a \frac{\partial f}{\partial x}(x+at, y+bt) + b \frac{\partial f}{\partial y}(x+at, y+bt)$$

定理（平均値の定理）

$$f(x+a, y+b) - f(x, y) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta a, y+\theta b) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x+\theta a, y+\theta b)$$

但し θ は 0と1の間の数.

$F(t) = f(x+at, y+bt)$ とおく.

平均値の定理より

$$F(1) - F(0) = F'(\theta)(1-0)$$

但し θ は 0と1の間の数.

上の式を書き直すと,

$$f(x+a, y+b) - f(x, y) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x+a\theta, y+b\theta) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x+a\theta, y+b\theta)$$

上記の証明を参考に多変数のTaylor展開を導びいてみよう.

まず一変数の場合

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \frac{1}{2!}F''(0)t^2 \cdots + \underbrace{\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n}_{(n+1)\text{番目}} +$$

となる. $F(t) = f(x+at, y+bt)$ の場合

$$F'(0) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + b\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

となる. $F''(0)$ を求めるために以下の計算をする.

$$F'(t) = a\frac{\partial}{\partial x}f(x+at, y+bt) + b\frac{\partial}{\partial y}f(x+at, y+bt)$$

まず $a\frac{\partial}{\partial x}f(x+at, y+bt)$ の微分を考える.

$F'(t)$ の計算から上記の微分は

$a \times$ (x での偏微分) $+ b \times$ (y での偏微分)

となるので,

$$a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+at, y+bt) + ab\frac{\partial^2}{\partial y \partial x}f(x+at, y+bt)$$

もう1つの項の微分

$$ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(x+at,\ y+bt)+b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x+at,\ y+bt)$$

ほとんどの場合 $\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial x}$ なので

$$\begin{aligned}
F''(t) &= a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x+at,\ y+bt)\\
&\quad 2ab\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(\quad " \quad)\\
&\quad b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(\quad " \quad)\\
&= \left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x+at,\ y+bt)
\end{aligned}$$

同様に

$$F^{(n)}(t)=\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x+at,\ y+bt)$$

以上より最初の式

$$F(t)=F(0)+F'(0)t+\frac{1}{2!}F''(0)t^2+\cdots+\frac{1}{n!}F^{(n)}(0)t^n+\cdots$$

$t=1$ と先の計算を代入すると、

$$\begin{aligned}
f(x+a,\ y+b) &= f(x,y)+\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x,y)\\
&\quad+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{n!}\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x,y)\\
&\quad+\cdots
\end{aligned}$$