5/9.

連絡事項

- 5/30 中間試験
  (Taylor展開の計算は必ず出す.)
- 5/23 予想問題の演習+相談
  (持ち込み可,不可?)

2. 連続関数と微分可能関数(続き)

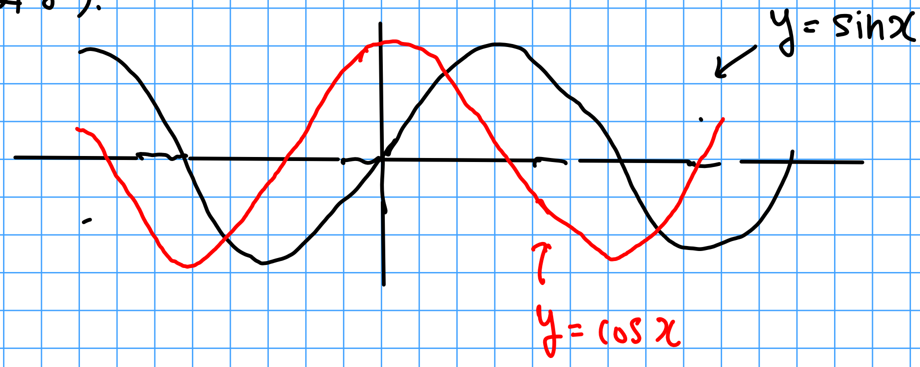
微分の基本公式 (その1.)

$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \text{ 実数})$$
$$(e^{x})' = e^{x}$$

例題 $(\sin x)^{(n)}$ = (n回微分した関数) を求めよ.

n階導関数と呼ぶ

解答に入る前に $\sin x$, $\cos x$ のグラフを描いてみよう.



$$\begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos x \\ \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \end{cases}$$

解答. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ を帰納法で示す.

$n=1$ 上の式より O.K.

$n=k$ のとき成立すると仮定する.

$$(\sin x)^{(k+1)} = \{(\sin x)^{(k)}\}' = \left\{\sin\left(x+\frac{k\pi}{2}\right)\right\}' = \cos\left(x+\frac{k\pi}{2}\right) = \sin\left(x+\frac{k+1}{2}\pi\right)$$

問(1) (a)

$$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \text{ より}$$

$$x+\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi}{2}$$

$$(\cos x)^{(n)} = \left\{\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{(n)}$$

$$= \sin\left(x+\frac{n+1}{2}\pi\right)$$

$$= \cos\left(x+\frac{n}{2}\pi\right)$$

帰納法で示しても良い。

問(1) (c)

一般に

$$f(ax+b)' = af'(ax+b)$$

$$f(ax+b)^{(2)} = a^2 f^{(2)}(ax+b)$$

$$f(ax+b)^{(3)} = a^3 f^{(3)}(ax+b)$$

$$\vdots$$

又、基本公式より

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$(x^\alpha)^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$(x^\alpha)^{(3)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$$

よって

$$\left\{(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}' = 2\cdot\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\{(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^{(2)} = 2^2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\vdots$$

$$\left\{(2x+1)^{\frac{1}{2}}\right\}^{(n)} = 2^n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right) \times (2x+1)^{\frac{1}{2}-n}$$

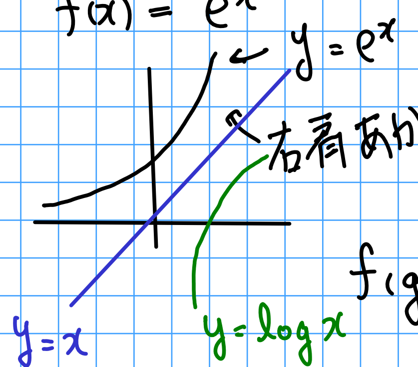
定義(逆関数)

関数 $y=f(x)$ が $a \leqq x \leqq b$ で単調増加(又は減少)であるとき 関数 $g(x)$ で

$$x = f(g(x))$$

をみたすものを f の逆関数という。

例 $f(x)=e^x$ に対して



$$g(x) = \log_e x$$

とすれば

$$f(g(x)) = e^{\log_e x} = x$$

定義　$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ で $\sin x$ は単調増加。この範囲での逆関数を

$$\mathrm{Arcsin}\, x \qquad \text{$\mathrm{Sin}^{-1}x$ などとも書く。}$$

と書く。同様に $\cos x$, $\tan x$ が単調になる範囲で定義された逆関数を

$$\mathrm{Arccos}\, x, \qquad \mathrm{Arctan}\, x$$

と書く。　$(\mathrm{Cos}^{-1}x)$　　$(\mathrm{Tan}^{-1}x,\ \mathrm{Arctg}\,x)$

さて　次の値を考えてみよう。

$$\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2}, \quad \mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

定義から

$$\sin\left(\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$-\frac{\pi}{2} \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ より、　$\mathrm{Arcsin}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$$\sin\left(\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$\mathrm{Arcsin}\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$

まとめると　$\mathrm{Arcsin}\, x$ の値は

$$x = \sin t$$

をみたす　$-\frac{\pi}{2} \leqq t \leqq \frac{\pi}{2}$ の値。

例題

$\mathrm{Arccos}\,\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$　　$\cos ? = \frac{1}{2}$ の解は?

$\mathrm{Arctan}\,1 = \frac{\pi}{4}$　　$\tan ? = 1$ の解は?

補題　$f(x)$ の逆関数 $g(x)$ の $x=a$ における微分係数 $g'(a)$ は

$$g'(a) = \frac{1}{f'(b)} \qquad b = g(a)$$

となる。

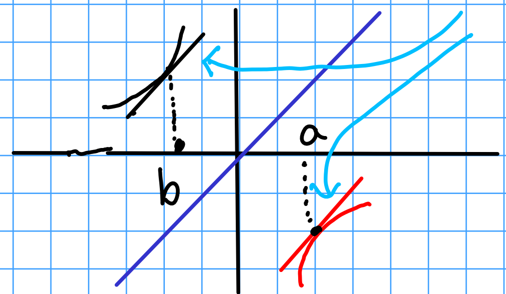
説明)　$f(x)$ のグラフと $g(x)$ のグラフは $y=x$ に関して対称。

実際　$y = g(x)$ のグラフ上の点 $(a, g(a))$ の $y=x$ に関する対称点は $(g(a), a)$。
これを式 $y = f(x)$ に代入すると、

$$a = f(g(a))$$

この式は定義そのものである。

この対称という事実を使うと．



この2つの接線の傾きは $y=x$ に関して対称

一般に $\left\{\begin{array}{l} y = ax+b \\ y = cx+d \end{array}\right\}$ $y=x$ に関して対称

とすると，　$ac = 1$

何故なら　$a = \dfrac{\text{終点}-\text{始点の }y\text{座標}}{〃 \quad x \ 〃}$

$c = \dfrac{〃 \quad x \ 〃}{〃 \quad y \ 〃}$

さて，補題に戻ると　$b = g(a)$ としたので　$f(b) = a$. よって上図の 2つの点の x 座標をそれぞれ a, b と思うと　$g'(a) = \dfrac{1}{f'(b)}$ がわかる.

この補題を用いて次の例題を解こう.

例題　$y = \mathrm{Arcsin}\, x$ の導関数を求めよ.

解答）補題から,

$$(\mathrm{Arcsin}\, x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

これを x の式に直す.　$x = \sin y$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad //$$

問(2) (a).

$$(\mathrm{Arccos}\, x)' = \frac{1}{(\cos y)'}$$

$$= -\frac{1}{\sin y}$$

$x = \cos y$ より

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

(b)

$$(\mathrm{ArcTan}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

・※ Arctan x の導関数の求め方

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$ より

$$(\mathrm{Arctan}\, x)' = \cos^2 y$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$