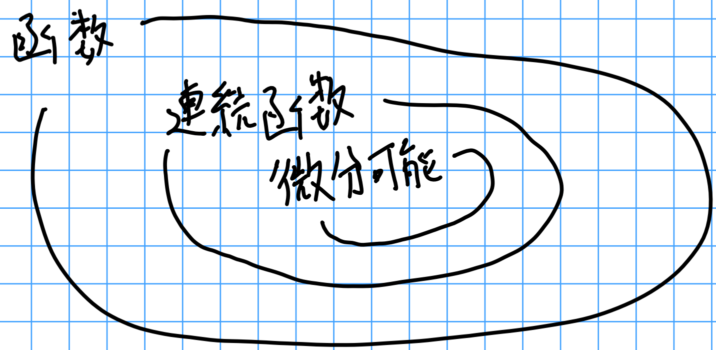
2. 連続函数（続き）



・一般の函数は先週の例にもあったように非常に奇妙なものがある。

・統一した性質を持っていて欲しい場合函数に条件をつける必要がある。

定義　函数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能とは、

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\overset{a}{\cancel{x}}+h)-f(\overset{a}{\cancel{x}})}{h}$$

が存在するときを言う。

例題

$$y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

は $x=0$ で連続ではあるが、微分可能でないことを示せ。

解答

$\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$ をまず示す。

$\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leqq 1$ なので $\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqq |x|$

又 $\lim_{x\to 0}|x|=0$. よって $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

次に微分可能でないことを示す。

$$\lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\sin 1/h-0}{h}=\lim_{h\to 0}\sin\frac{1}{h}$$

この極限は存在しない。

例題

$$y=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

について同様なことを示せ。

$\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$ 及び $\lim_{h\to 0} \frac{h\cos 1/h - 0}{h}$

が存在しないことを示せば良い。

$\left|\cos\frac{1}{x}\right| \leqq 1$ より $\left|x\cos 1/x\right| \leqq |x|$

$\lim_{x\to 0}|x| = 0$ なので $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0.$

又 $\lim_{h\to 0}\frac{h\cos 1/h - 0}{h} = \lim_{h\to 0}\cos\frac{1}{h}$

となるので極限は存在しない。

例題

$$y = \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

は $x=0$ で微分可能であるが、導関数は $x=0$ で連続でないことを示せ。

解答. 定義より

$$\lim_{h\to 0}\frac{h^2\sin 1/h - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\sin\frac{1}{h}$$
$$= 0$$

又 $x \neq 0$ で導関数は

$$y' = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\left(\cos\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to 0} y' = \lim_{x\to 0} -\cos\frac{1}{x}$ ← 収束せず

(教科書 p50)

問題 (2) 定義より

$$y'(0) = \lim_{h\to 0}\frac{h^3\sin\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h^2\sin 1/h$$
$$= 0$$

一方 $x \neq 0$ $y' = 3x^2\sin\frac{1}{x} - x\cos\frac{1}{x}$

となるので

$\lim_{x\to 0} y' = 0 = y'(0)$ となり連続。

以上の例題で

1) $x=a$ で連続でも微分可能とは限らない

2) 導関数は連続とは限らない

補題. $x=a$ で微分可能なら、連続

∵ $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(\overset{a}{\cancel{x}}+h)-f(\overset{a}{\cancel{x}})}{h}$ が存在するので

$(\text{分子})=\displaystyle\lim_{h\to 0}\{f(a+h)-f(a)\}=0$.

※ 関数のグラフが描けるとき、

連続 …… グラフがつながっている。

微分可能 … グラフが滑らか。

※ 全ての点で連続でかつ微分不可能な関数が存在する。… 高木関数

by google.

連続関数は大きな2つの特質がある。

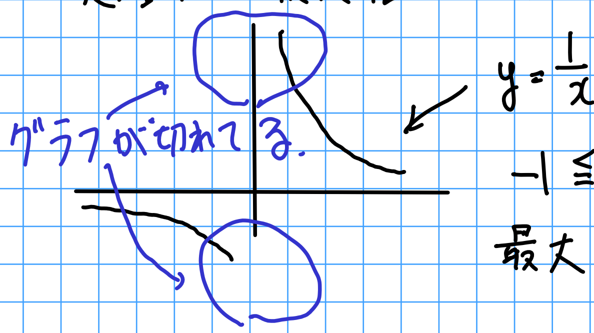
定理1. $a\le x\le b$ で連続な関数 $f(x)$ はこの区間で、最大、最小を持つ。

(教科書 p26)

定理2. $a\le x\le b$ で連続な関数 $f(x)$ は $A=f(a)$, $B=f(b)$ としたとき、AとBの間の値を必ず取る。

(教科書 p27).

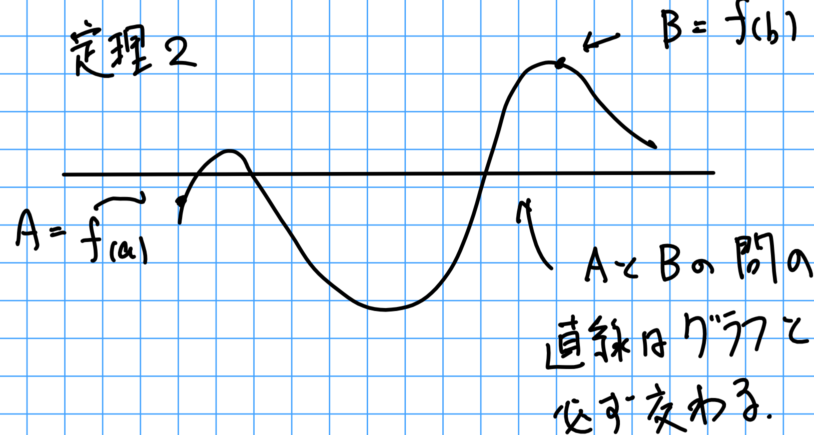
定理1. 最大値がない。



$-1\le x\le 1$ で

最大、最小なし。

定理2



さて、高校数学で

$y=f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が

$$\begin{cases} f'(x)>0 \Rightarrow f(x) \text{は増加} \\ f'(x)=0 \Rightarrow f(x) \text{が極値(?)} \\ \qquad\qquad\text{or} \\ \qquad\qquad f(x) \text{が定数.} \end{cases}$$

となることを学習した. この事実に証明をつける.

Step 1.

定理 (平均値の定理) (p48)

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ が微分可能とする.

このとき $a \leqq c \leqq b$ で

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

となるものが存在する.

この定理を使うと,

$a<b$ に対して

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\Rightarrow f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$

$f'(c)>0$ ならば $f(b)-f(a)>0$

$f'(c)=0$ ならば $f(b)-f(a)=0$

問題 (3)

平均値の定理より ある $a<c<b$ があり

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

よって $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$

今 $f'(x)<0$ なので $f'(c)<0$.

よって $f(b)-f(a)<0$.

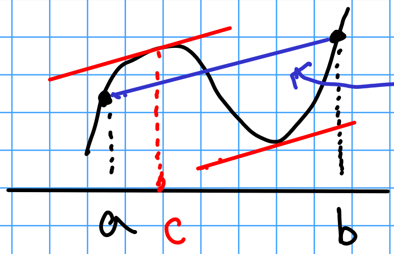
問題 (4) (3)と同様の議論で

1次関数

$$f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$$
$$= b-a$$

$b=x+a$ とすると, $f(x+a) = f(a)+x$

Step 2. 平均値の定理の証明.



この線分の傾き $= \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = (定理の左辺)

青の線分と平行な接線が(少なくとも1つは)取れる

定理 (Rolleの定理) (p47).

- $a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ は微分可能.
- $f(a) = f(b)$

このとき, $a \leqq c \leqq b$ で $f'(c) = 0$

となるものがある.

この定理を認めると 関数

$F(x) = (b-a)f(x) - (f(b)-f(a)) \cdot x$

とおけば

$F(b) = -af(b) + f(a) \cdot b$

$F(a) = bf(a) - f(b) \cdot a$

すなわち $F(b) = F(a)$

Rolleの定理より $a \leqq c \leqq b$ で

$F'(c) = 0$

これを書き直すと

$(b-a)f'(c) - (f(b)-f(a)) = 0.$

Step 3. Rolleの定理の証明.

$a \leqq x \leqq b$ で $f(x)$ は連続

よって 最大値, M 最小値 m を取る.

$M = m = 0$ のとき. $f(x) \equiv 0$ より

定理は成立.

$M > 0$ とする. $f(c) = M$ とおく.

$f(c+h) - f(c) \leqq 0 \quad h \geqq 0$

$f(c+h) - f(c) \leqq 0 \quad h \leqq 0$

符号を考えて.

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \begin{cases} \leqq 0 & h \geqq 0 \\ \geqq 0 & h \leqq 0 \end{cases}$$

よって lim は 0 //