問1.

$x=a$ のまわりの Taylor展開とは、

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a)^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 + \cdots$$

このような公式は問題文中に入れる。

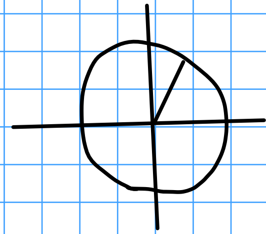
$f(x)=\sin x$ に対して n次導関数

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} \cos x & n\equiv 1 \pmod 4 \\ -\sin x & n\equiv 2 \pmod 4 \\ -\cos x & n \equiv 3 \pmod 4 \\ \sin x & n\equiv 0 \pmod 4 \end{cases}$$

※ $a\equiv b \pmod n$

a と b は n で割った余りが等しい。

よって $a=\frac{\pi}{3}$ に対して



$$f'(a) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$f^{(2)}(a) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{(3)}(a) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$f^{(4)}(a) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

先の式

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{4}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{12}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^3 \cdots$$

問2.

(1) 定義に従って計算する。

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2\cos\frac{1}{h} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h}$$

$\left|\cos\frac{1}{h}\right| \leq 1$ より $\lim_{h\to 0} h\cos\frac{1}{h} = 0$

(2) (1)より $f'(0)=0$.

一方 $x \neq 0$ のとき,

$$f'(x) = 2x\cos\frac{1}{x} + x^2\cdot\left(-\sin\frac{1}{x}\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= 2x\cos\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x}$$

となり $\lim_{x\to 0} f'(x)$ は収束しない.

よって $x=0$ で連続ではない.

問3.

ヒントに従い $e^h = 1+\frac{1}{t}$ として考える.

このとき, $h = \log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)$

又, $h\to 0$ のとき, $t\to +\infty$

よって

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{t\to\infty}\frac{1+\frac{1}{t}-1}{\log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1/t}{\log_e\left(1+\frac{1}{t}\right)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t\log_e\left(1+1/t\right)}$$

$$= \lim_{t\to\infty}\frac{1}{\log_e\left(1+1/t\right)^t}$$

$$= \frac{1}{\lim_{t\to\infty}\log_e\left(1+1/t\right)^t}$$

$$= \frac{1}{\log_e e} = 1$$

※ 同様にして,

$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$ を e の定義とし

$\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e$ が示せる.

一方 $e = \Sigma\frac{1}{n!} = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$

を $e = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ を定義として

導くことは出来るが, 難しい (その逆も)

問4.

定理 (l'Hopital)

$\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ が不定形, すなわち

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$$
$$\text{〃} \qquad \text{〃} = 0$$

かつ $f(x)$, $g(x)$ が微分可能かつ導函数も連続ならば,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

これを使うと,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x\log a - b^x\log b}{1}$$
$$= \log a - \log b$$

解2. $f(x) = a^x - b^x$ とおく. すると

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x - b^x - 0}{x - 0}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$
$$= f'(0)$$

解3 a^x, b^x の Taylor展開を利用する.

a^x の $x=0$ のまわりの Taylor展開は.

$$a^x = 1 + x\log a + \frac{1}{2!}(x\log a)^2 + (x\text{の3次以上})$$

($a^x = e^{x\log a}$ を使った.)

$$b^x = 1 + x\log b + \frac{1}{2!}(x\log b)^2 + (x\text{の3次以上})$$

よって

$$a^x - b^x = x(\log a - \log b) + \frac{1}{2!}\{x^2(\log a)^2 - (\log b)^2\} + \cdots$$

よって

$$\frac{a^x-b^x}{x} = \log a - \log b + \frac{1}{2!}x\{(\log a)^2-(\log b)^2\} + \frac{1}{3!}x^2\{(\log a)^3-(\log b)^3\} + \cdots$$

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-b^x}{x} = \log a - \log b$$

問5.

解1 $f(x) = \dfrac{x-1+1}{(1-x)^2} = \dfrac{x-1}{(1-x)^2}+\dfrac{1}{(1-x)^2}$

$$= -\frac{1}{1-x}+\frac{1}{(1-x)^2}$$

ここで $\left(\dfrac{1}{1-x}\right)^{(n)} = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$

これは $\left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)} = (x^{-1})^{(n)} = (-1)^n n!\,x^{-n-1}$

に $1-x$ の x の係数が -1 であること

からわかる。

よって

$$\{f(x)\}^{(n)} = -\frac{n!}{(1-x)^{n+1}} + \frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}}$$

解2.

公式

$$\{f(x)\,g(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x)$$

を $f(x) = x$, $g(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

として適用する。すると

$$f^{(n)}(x) = 0 \quad (n \geqq 2)$$

なので

$$\{f(x)\cdot g(x)\}^{(n)} = f^{(0)}(x)\,g^{(n)}(x) + n\,f'(x)\,g^{(n-1)}(x)$$

$$= x\cdot g^{(n)}(x) + n\cdot 1\cdot g^{(n-1)}(x)$$

$$= x\cdot\frac{(n+1)!}{(1-x)^{n+2}} + n\cdot\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

$$= \frac{n!\,(x+n)}{(1-x)^{n+2}}$$