合成函数の微分の公式

函数 $f(x)$, $g(x)$ の合成函数 $f(g(x))$ の導函数は

微分可能

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

利用例

$\{x^x\}'$ を求める. $(x>0)$

$$x^x = e^{x\log x} = \exp(x\log x)$$

とも書く.

$e^{x\log x}$ を函数 $e^x$ 及び $x\log x$ の合成函数と思う.

$$\{e^x\}' = e^x$$

$$\{x\log x\}' = \log x + x\cdot\frac{1}{x}$$

$$= \log x + 1$$

より

$$\{x^x\}' = e^{x\log x}\times(\log x + 1)$$

$$= x^x(\log x + 1)$$

例題 (1)

$$\{x^\alpha\}' = \{e^{\alpha\log x}\}'$$

函数 $e^x$ 及び $\alpha\log x$ の合成函数と思う.

$$\{x^\alpha\}' = e^{\alpha\log x}\cdot\frac{\alpha}{x}$$

$$= x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

(2) $\{\log|\tan x|\}'$

函数 $\log x$ と $\tan x$ の合成函数と思う.

$$\{\log|\tan x|\}' = \frac{1}{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sin x\cos x}$$

注) この公式を使って, 逆函数の微分公式が "出せる"

$x = f(g(x))$ の両辺を微分

$$1 = f'(g(x))\,g'(x)$$

$$g'(x) = 1/f'(g(x)) = 1/f'(y)$$

この説明では逆関数 $g(x)$ が微分可能である，ということが欠けている．⇒ 教科書 p42.

合成関数の微分公式の証明.

ここで，$f'(x)$, $g'(x)$ は連続と仮定する.

関数 $p(x)$ を次のように定める.

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x \neq a \\ f'(a) & x = a \end{cases}$$

すると

$$f(x)-f(a) = p(x)(x-a)$$

同様に

$$q(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)-g(\cancel{a}\,b)}{x-a} & x \neq \cancel{a}\,b \\ g'(\cancel{a}\,b) & x = \cancel{a}\,b \end{cases}$$

とおく.

さて，$a = g(b)$ とし $x$ に $g(x)$ を代入すると，

$$f(g(x)) - f(g(b)) = p(g(x))(g(x)-g(b))$$

$$= p(g(x))\{q(x)(x-b)\}$$

$x \neq b$ のとき，両辺を $x-b$ で割ると，

$$\frac{f(g(x))-f(g(b))}{x-b} = p(g(x))\,q(x)$$

$x \to b$ と極限を取れば，

(左辺) $= \{f(g(x))\}'$ の $x=b$ での値.

(右辺) $= f'(g(b))\,g'(b)$

$f'(x)$, $g'(x)$ の連続性を仮定しない証明は教科書 p39.

3. Taylor展開.

Taylor展開とは $f(x)$ を $n+1$ 回微分可能な関数としたとき

$$f(x) \fallingdotseq (n\text{次多項式})$$

近似の意味

となる $n$ 次多項式が計算できる，こと.

もう少しきちんと書くと,

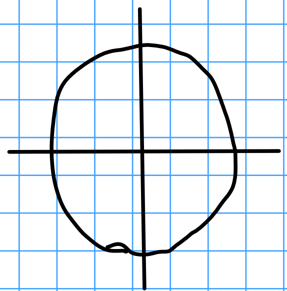
$$f(x) \fallingdotseq f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2!}f^{(2)}(a)(x-a) \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)$$

$$\fallingdotseq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

例 $f(x) = \sin x$. $a=0$ とすれば

$$f^{(\cancel{k}\,n)}(0) = \sin\left(0 + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & n \text{ 偶数} \\ 1 & n \text{ 4で割って1余る} \\ -1 & n \text{ 〃 } 3 \end{cases}$$



となるので

$$\sin x \fallingdotseq \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f(a)}} + \underset{x}{\underset{\shortparallel}{f'(a)(x-a)}} + \frac{1}{2!}\underset{0}{\underset{\shortparallel}{f^{(2)}(a)}}(x-a)$$

$$+ \frac{1}{3!}f^{(3)}(a)(x-a)^3 = -\frac{1}{3!}x^3$$

$$\fallingdotseq x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 \cdots$$

例 $f(x) = \cos x$  $a = 0$

$$f^{(n)}(0) = \cos\left(0 + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 1 & n \text{ 4の倍数} \\ 0 & n \text{ 奇数} \\ -1 & n \text{ 4で割って2余る.} \end{cases}$$

となるので

$$\cos x \fallingdotseq x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \cdots$$

例 $f(x) = \log(1+x)$  $a = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \qquad f^{(2)}(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3} \qquad f^{(4)}(x) = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{(1+x)^4}$$

$$\cdots \quad f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$$

よって

$$\log(1+x) \fallingdotseq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \cdots$$

定理　$f(x)$ を $n+1$ 回微分可能な函数とし　$a$ を固定する. このとき $x$ と $a$ の間の数 $c$ が存在して,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}$$

証明). まず次の定理を確認する.

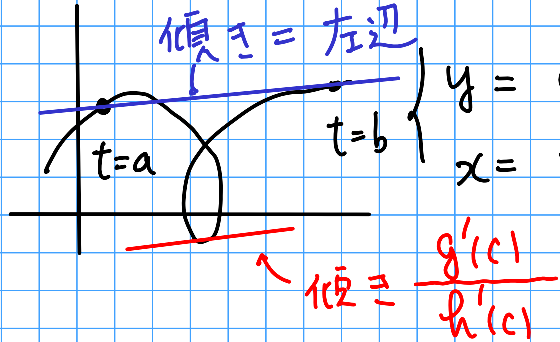
定理.　$g(x)$, $h(x)$ を微分可能な函数とする.

このとき任意の $a \leqq b$ に対して,

$$\frac{g(b)-g(a)}{h(b)-h(a)} = \frac{g'(c)}{h'(c)}$$

となる $c$ が存在する.

これは次の事実を式にしたもの.




$\begin{cases} y = g(t) \\ x = h(t) \end{cases}$ のグラフ

この定理を

$$g(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

$$h(x) = (x-a)^{n+1}$$

$b = x$　$a = a$ として適用する.

$$\frac{g(x)-g(a)}{h(x)-h(a)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)}$$

ここで　$g(a) = h(a) = 0$　なので

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)}$$

又　$g'(a) = h'(a) = 0$ なので

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \frac{g'(c_1)-g'(a)}{h'(c_2)-h'(a)} = \frac{g^{(2)}(c_2)}{h^{(2)}(c_2)}$$

これをくりかえせば

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \cdots = \frac{g^{(n+1)}(c_{n+1})}{h^{(n+1)}(c_{n+1})}$$

$$= \frac{f^{(n+1)}(c_{n+1})}{(n+1)!}$$

$c_{n+1}$ をあらためて $c$ とおき $h(x)$ を両辺にかければ,

$$g(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}$$

$$\parallel$$

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)(x-a)^k$$

例 $f(x) = \mathrm{Arctan}\, x \qquad a = 0$

$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ より

$$(1+x^2) f'(x) = 1.$$

上式と公式

$$\{g(x)h(x)\}^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k\, g^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x)$$

を使うと,

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$g(x) = 1+x^2, \quad h(x) = f'(x)$ とすれば

$$\begin{aligned}\{g(x)h(x)\}^{(n)} &= g(x)h^{(n)}(x) \\ &\quad + n\, g'(x) h^{(n-1)}(x) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} g''(x) h^{(n-2)}(x) \\ &= (1+x^2) f^{(n+1)}(x) \\ &\quad + n \cdot 2x f^{(n)}(x) \\ &\quad + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

一方 $(\text{右辺})^{(n)} = 0$

まとめて,

$$(1+x^2) f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1) f^{(n-1)}(x) = 0$$

上式に $0$ を代入すると

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1) f^{(n-1)}(0) = 0$$

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1) f^{(n-1)}(0) = 0$$

に $n = 1, 2, 3 \cdots$ を代入することで

$$f^{(3)}(0) + 2\cdot 1\cdot f^{(1)}(0) = 0 \qquad f^{(3)}(0) = -2$$

$$f^{(5)}(0) + 4\cdot 3\cdot f^{(3)}(0) = 0 \qquad f^{(5)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4$$

$$f^{(7)}(0) + 6\cdot 5\, f^{(5)}(0) = 0 \qquad f^{(7)}(0) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

又、偶数は

$$f^{(2)}(0) + 1\cdot 0\cdot f^{(0)}(0) = 0 \qquad f^{(2)}(0) = 0$$

$$f^{(4)}(0) + 3\cdot 2\, f^{(2)}(0) = 0 \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

以上より

$$\mathrm{Arctan}\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 \cdots$$

$x = 1$ を代入すれば

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \cdots$$

※

$$g'(x) = f'(x) - \Big(f'(a) + f''(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-1}\Big)$$

$$g''(x) = f''(x) - \Big(f''(a) + f^{(3)}(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{(n-2)!} f^{(n)}(a)(x-a)^{n-2}\Big)$$

となるので

$$g'(a) = g''(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$$

となる.