4/25 (金)

連絡事項

- 授業に関する質問は 授業時間の前後か,
  E-mail matusita@math.sci.hokudai.ac.jp
  Tel 011-706-3515
  相談の約束を取ること.

1. 極限 (つづき)

定義 (2回目)

数列 a_n が $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ に収束

アルファ

イプシロン

するとは, $\forall \varepsilon > 0$ に対し ある自然数 N_0 があって, $\forall n \geq N_0$ に対して

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

となるときを言う.

例題

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ を定義に従って説明せよ

解答) $\forall \varepsilon > 0$ に対し, N_0 を

$$N_0 = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \text{ より大きい数}\right)$$

と取れば $\forall n \geq N_0$ に対し

$$0 < \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N_0^2} \leq 1\Big/\left(1/\sqrt{\varepsilon}\right)^2 = \varepsilon$$

となるので $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.

例題 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$ を定義に従って説明せよ.

解答) $\forall \varepsilon > 0$ に対し N_0 を

$$N_0 = \left(1/\sqrt[3]{\varepsilon} \text{ より大きい数}\right)$$

と取れば,

$$0 < \frac{1}{n^3} \leq \frac{1}{N_0^3} \leq 1\Big/\left(1/\sqrt[3]{\varepsilon}\right)^3 = \varepsilon$$

となる.

※ 鍵は

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

例題では

$$\left|\frac{1}{n^2} - 0\right| < \varepsilon$$

これが成立するためには n をどれだけ大きく取ればいいかを示す所にある.
具体的には ~~~ を "nについて" 解けば良い.

補題　数列 a_n が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \alpha$

$\alpha < 1$ を満たすとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

これを使えば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{2^n} = 0$ などが示せる.

補題の証明）　収束の定義から
$\forall \varepsilon > 0$ に対して, ある N_0 があり
$\forall n \geq N_0$ に対して,

$$\left|\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| - \alpha\right| < \varepsilon$$

よって $\alpha + \varepsilon = r < 1$ となるよう ε を取れば $\forall n \geq N_0$ に対して

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < r \Rightarrow |a_{n+1}| < r|a_n|$$

よって

$$|a_n| < r|a_{n-1}| < r^2|a_{n-2}|$$
$$\cdots\cdots < r^{n-N_0}|a_{N_0}|$$

$$\lim_{n\to\infty} r^{n-N_0}|a_{N_0}| = 0$$

より

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

※ 大学数学の難しい点の1つとして抽象度があがる. すなわち 数列, 関数が具体的な式で与えられないことが多い, という点がある.

2. 連続函数

定義　与えられた数に対して数を対応させる規則を函数という。

例.
- x^4 : $x \longmapsto$ (xの4乗)
- $\sin x$: $x \longmapsto \sin x$
- $f(x)$: x 有理数 $\left(p/q\right)$ 既約分数 $\longmapsto f(x) = \dfrac{1}{q}$

  x 無理数 $\longmapsto f(x) = 0$

  $f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{4}$　　$f(\pi) = 0$
- $g(x)$: $x \longmapsto$ (xを2進法で表し，10進法で読む)

  $g(3)$ … $3 = \cancel{10}\ 11_{(2)}$

  $\;= \cancel{10}\ 11$

$$5 = 4 + 1 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 101_{(2)}$$ より $g(5) = 101$.

$$2 = 1\cdot 2^1 = 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + \cdots$$

$$= 10_{(2)}$$

$$= 1.1111111\cdots_{(2)}$$

こうした場合は前者を取る。

$g(2) = 10$

$$\frac{1}{3} = \overset{=2^{-2}}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{12}$$

$$= \overset{=2^{-2}}{\frac{1}{4}} + \overset{=2^{-4}}{\frac{1}{16}} + \frac{1}{48}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \overset{=2^{-8}}{\frac{1}{64}} + \frac{1}{192}$$

$$= 0.01010101\cdots_{(2)}$$

※ 2進法とは 位取りに 2のべきを使う書き方

$$101_{(2)} = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$
$$= 4+1 = 5$$
$$1001_{(2)} = 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$$
$$= 8+0+0+1 = 9$$

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{8} + \frac{3}{40} \quad = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{16}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{8}}_{2^{-3}} + \underbrace{\frac{1}{16}}_{2^{-4}} + \cancel{\underbrace{\frac{1}{128}}_{2^{-7}} + \frac{3}{400}}$$

より

$$\frac{1}{5} = 0.00110011\cdots_{(2)}$$

$$g(1/5) = 0.00110011\cdots$$

※ 以上のように 特殊な数の数え方や定義なども大学では扱う.

連続函数の定義の前に 函数の収束をまず定義する.

定義 函数 $f(x)$ が

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = A.$$

とは $\forall\varepsilon>0$ に対し, ある $\delta>0$ があり（デルタ）

$\alpha-\delta < {}^{\forall}x < \alpha+\delta$ に対して

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

となるときを言う.

定義 函数 $f(x)$ が $x=\alpha$ で連続とは

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$$

であるときを言う.

※ 先の函数の例のうち 後ろ2つは奇妙な例で, こうしたものを排除できるうまい函数のクラスがあると良い. その1つが連続函数.

例題　$f(x)=\sin x$ が $0<x<\frac{\pi}{2}$ で連続であることを示せ.

解答). 定義から $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ に対し,

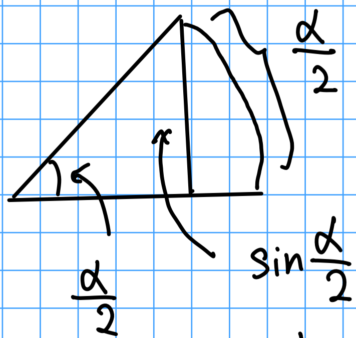
$$|f(x)-f(\alpha)|$$
$$=|\sin x-\sin\alpha|$$

が $\forall\varepsilon>0$ より小さくなるような x の範囲を求めればよい

$$|\sin x-\sin\alpha|=2\left|\cos\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{\overset{x-\alpha}{\cancel{\alpha}}}{2}\right|$$

より

$$|\sin x-\sin\alpha|<2\left|\sin\frac{\overset{x-\alpha}{\cancel{\alpha}}}{2}\right|\le\cancel{\alpha}\ |x-\alpha|$$



左図参照

よって $|x-\alpha|<\varepsilon$ であれば

$$|\sin x-\sin\alpha|<\varepsilon.$$

問題(3)の解答

$$|\cos x-\cos\alpha|=2\left|\sin\frac{x+\alpha}{2}\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|$$

より

$$|\cos x-\cos\alpha|\leqq 2\left|\sin\frac{x-\alpha}{2}\right|$$
$$\leqq 2\cdot\frac{|x-\alpha|}{2}=|x-\alpha|$$

となるので $\delta=\varepsilon$ と取れば

$|x-\alpha|<\delta$ となる x に対して

$|\cos x-\cos\alpha|<\varepsilon$ ■

※ 例の3番目の関数は

$x=\alpha$ … 無理数　$f(x)$ は α で連続

… 有理数　〃　不連続