4/18 (金)

連絡事項

1. 成績は 2回のテストの結果でつける
2. 1回目のテストは 5/30 (金)
   2回目のテストは 8/1 (金)
3. 上記の日程で都合が悪い場合
   ~~事~~ → ~~時~~前に
   相談にくること.

1. 極限

一部 高校数学とかぶるが,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

など, 極限の基本的な定義, 性質については既知とする.

補題

数列 a_n に対して, $\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \alpha, \alpha < 1$ であるとき,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

何故このような補題が成立するか？は後にして, 利用法を先に話す.

例題 次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{3^n}$$

← 答が0なのは予想できる.
It is easy to expect the answer is 0.

解答. $a_n = \frac{n^3}{3^n}$ とする. このとき,

$$\left| a_{n+1}/a_n \right| = \frac{3^n}{n^3} \cdot \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$$

よって

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{3} < 1$$

補題より, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

例題　次の極限を求めよ.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+3+5+\cdots+(2n-1)}{2+4+6+\cdots+2n}$$

解答

$$1+2+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

を利用すれば,

$$(与式)=\frac{2\Sigma k-n}{2\Sigma k}=\frac{2\frac{n(n+1)}{2}-n}{2\cdot\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{n(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{n^2}{n^2+n}$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{n}}$$

より　求める極限は　1.

例題　次の極限を求めよ.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$,　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3^n+5^n}$,　(2) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^n$

解答　$\sqrt[n]{}$ には log を取って考えると良い

(1) $$\log\sqrt[n]{3^n+5^n}=\frac{1}{n}\log(3^n+5^n)$$

$$=\frac{1}{n}\left(\log 5^n\cdot\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\log 5^n+\frac{1}{n}\log\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right\}$$

$$=\log 5+\frac{1}{n}\log\left(\left(\frac{3}{5}\right)^n+1\right)$$

$n\to\infty$ とすれば　求める極限は　~~log~~ 5.

(2)　基本として

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

$$与式=\left(1+\frac{2}{n}\right)^n=\left\{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2$$

と変形できるので, 求める極限は　e^2

小テストの解答.

(1) $a_n = \frac{n^4}{2^n}$ とおくと, $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 \cdot \frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

よって $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2)

$$与式 = \frac{1+4+7+\cdots+(3n-2)}{3+6+9+\cdots+3n}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{n}(3k-2)}{\sum_{k=1}^{n}3k}$$

$$= \frac{3\sum_{k=1}^{n}k - 2n}{3\sum_{k=1}^{n}k}$$

$$= \frac{3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 2n}{3\cdot\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$= \frac{3n^2-n}{3n^2+n} = \frac{3-1/n}{3+1/n}.$$

となり 求める極限は 1.

(3) 次の解答はあやまり.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+5^n} = \lim_{n\to\infty} 5\sqrt[n]{\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}$$

ここで $\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ より

$$= 5.$$

n は同時に → ∞ としなければならない.

そこで log を取る.

$$= \log 5 + \underline{\frac{1}{n}\log\left(\left(\frac{2}{5}\right)^n+1\right)}$$

積の形では別々に
$n\to\infty$ として良い.
(但し各パーツが収束するときのみ)

(4) 与式 $= \cancel{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left\{\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n}\right\}^{-1}}$

となるので、求める極限は e^{-1}。 後の注を参照

各回の小テスト、板書のpdfは

http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~matusita/

ここから少し進んだ極限について述べる。

例題 数列 a_n は $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を みたすとする。このとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}=\alpha$$

を示せ。

コメント. この問題の難しさは a_n が具体的に与えられてないため そのままでは式変形が出来ない所にある。

定義 数列 a_n が α に収束するとは、
$\forall e>0$ に対し、ある n_0 が存在して

Aのさかさま。All (すべて) の意味

$$\forall n \geq n_0,\quad |a_n-\alpha|<e$$

が成立するときをいう。

コメント. e は a_n と α の差を意味する。
定義は 差 e をどのように設定しても 十分大きな数 n_0 を用意すれば $n\geq n_0$ であれば、a_n と α の差は e より小さくできる、ということを主張している。

例題の解答。

上の定義と仮定より $\forall e>0$ に対してある n_0 があり、$\forall n\geq n_0$

$$|a_n-\alpha|<e$$

が成立する。これを用いて、

$$\frac{a_1+\cdots a_{n_0}+a_{n_0+1}+\cdots+a_n}{n}$$

番号 n_0 で 2つにわける.

$$= \frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n} + \frac{a_{n_0+1}+\cdots+a_n}{n}$$

この両辺から辺々 α を引くと,

$$\text{右辺} = \frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n} - \frac{n_0\alpha}{n} + \frac{a_{n_0+1}+\cdots+a_n}{n} - \frac{(n-n_0)\alpha}{n}$$

ここで 下の段の式だけをさらに変形する.

$$\bigcirc = \frac{(a_{n_0+1}-\alpha)+\cdots+(a_n-\alpha)}{n} < \frac{e+\cdots+e}{n} = \frac{(n-n_0)}{n}\cdot e$$

まとめて,

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right| < \frac{a_1+\cdots+a_{n_0}}{n} - \frac{n_0\alpha}{n} + \frac{(n-n_0)}{n}e$$

ここで n を十分大きく取れば

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-\alpha\right| < 2e$$

となる. 先程の収束の定義より.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+\cdots+a_n}{n} = \alpha.$$

注.1. 講義では $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ としたので

正しくは

$$(\text{与式}) = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{\frac{n}{n-1}}$$

と変形してから $n\to\infty$ としなければならない.