

科学・技術の世界 - 入門微分積分第四回小テスト -

問題 1. 次の積分を計算せよ.

$$\int \frac{1}{\cos x} dx, \quad \int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} dx$$

問題 2. 半径 2 の円の周の長さを積分を使って求めよ.

問題 3. 次の函数等式を解け.

$$f'(x) = -2f(x), \quad f(0) = 3$$

解答 1.

$$\int \frac{1}{\cos x} dx \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \text{とおく. すると}$$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{-2t(1+t^2) - (1-t^2)2t}{(1+t^2)^2} = -\frac{4t}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{より} \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{2t}{1+t^2}, \quad \text{よって}$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = \int \frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{1+t^2}{1-t^2} \cdot \frac{-2t}{1+t^2} dt$$

$$= \int \frac{-2t}{1-t^2} dt = \log |1-t^2|$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \text{より} \quad = \log \left| 1 - \tan^2 \frac{x}{2} \right|$$

次に

$$\frac{1}{(x-1)^2(x+2)} = -\frac{1}{9} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{x+2}$$

と展開できるので,

$$\int \frac{1}{(x-1)^2(x+2)} dx = \int \left\{ -\frac{1}{9} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{9} \frac{1}{x+2} \right\} dx$$

$$= -\frac{1}{9} \log(x-1) + \frac{-1}{3 \cdot (x-1)} + \frac{1}{9} \log(x+2).$$

解答 2

半径 2 の円 Γ は $(x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$ と表わすので

$$\begin{aligned}\text{周の長さ} &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\{2\cos\theta\}'^2 + \{2\sin\theta\}'^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin\theta)^2 + (2\cos\theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 1 d\theta = 2 [\theta]_0^{2\pi} = \underline{\underline{4\pi}}.\end{aligned}$$

解答 3

与えられた式を次のように変形する

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -2$$

両辺を x で積分する

$$\log f(x) = -2x + C$$

これから $f(x) = e^{-2x+C}$

$f(0) = 3$ より $e^{-2 \cdot 0 + C} = e^C = 3$.

よって $f(x) = \underline{\underline{3e^{-2x}}}$