科学・技術の世界 – 入門微分積分 – 小テスト 平成 19 年 5 月 7 日

問題 1. 二項定理

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=1}^{n} {}_nC_k a^k b^{n-k} \\ &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}a^{n-3}b^3 + \cdots\end{aligned}$$

を用いて

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$$

を示せ.

解答. 二項定理より,

$$\begin{aligned}2^n &= (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} + \cdots \\ &> 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{n^2}{2^n} &< \frac{n^2}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{n^2}+\frac{(n-1)}{2n}+\frac{(n-1)(n-2)}{6n}}\end{aligned}$$

ここで右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する. $0 < n^2/2^n$ より

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0.$$

問題 2. 次の極限を計算せよ.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}, \quad \lim_{n\to\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

解答. はじめの極限は,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{3n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n^2}{3-1/n^2} = \frac{1}{3}$$

となる. 真ん中のものは $|\sin n| \le 1$ から不等式

$$-\frac{1}{n} < \frac{\sin n}{n} < \frac{1}{n}$$

を得るが, 不等式の両辺は 0 に収束するので,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

最後のものは $x = 1/n$ と置き換えると

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

を計算すれば良いが, これは 1 である.