代数学4講究 Ver. 12/21

問題 1. 群 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の既約表現をすべて書け.

問題 2. $G$ を群, $k$ を体とする. $G$ から $k$ への写像の集合を $k(G)$ とおき, $k(G)$ の元 $f, g$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\
(\alpha f)(x) &= \alpha f(x), \quad \alpha \in k
\end{aligned}
$$

と定義する. このとき $k(G)$ は $k$ 上のベクトル空間となるが, $k(G)$ の次元を求め, その基底を一つあげよ.

問題 3. $G$ を有限群とし, 問題 2 の空間 $k(G)$ に次のような積を入れる.

$$
\langle f, g \rangle := \sum_{x \in G} f(x) g(x^{-1})
$$

このとき, この積が非退化であること, すなわち, すべての $f \in k(G)$ に対して, $\langle f, g \rangle = 0$ であれば $g = 0$ であることを示せ.

問題 4. 有限群 $G$ の既約表現の個数は $G$ の共役類の個数と等しいことを用いて三次対称群 $S_3$ のすべての既約表現を求めよ.