

- (1)  $n$  を自然数で, 素因数分解したとき, 平方因子を持たず, どの二つの素因子  $p, q$  に対しても  $p \not\equiv 1 \pmod{q}$  とする. このとき, 位数  $n$  の群は巡回群であることを,  $n$  の素因数の数に関する帰納法を使って示せ.
- (2) 位数  $2p$  の非可換群を分類せよ.
- (3)  $F$  を位数  $p^m$  の有限体とする.  $F$  の乗法群  $F^*$  の元で位数  $d$  であるもの  $\lambda$  から生成される巡回群  $G$  の  $F$  への作用を

$$F \ni x \mapsto \lambda x \in F$$

で定める. このときこの作用から定まる半直積  $F \rtimes G$  は次の行列からなる群と同型であることを示せ.

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda^m & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix}; \quad x \in F, 0 \leq m \leq d-1 \right\}$$

- (4) 二面体群  $D_n$  の組成列を剰余群も含めて一つ書け.