

- (1) 有限群 G の \mathbb{C} 上の表現 ρ に対応する指標 χ に対し,

$$\chi(x^{-1}) = \overline{\chi(x)}$$

であることを示せ. 但し, \bar{y} は y の複素共役を表す.

- (2) 有限群 G から \mathbb{C} への関数で共役類で一定の値を取る関数, すなわち

$$f(y^{-1}xy) = f(x)$$

を満す関数を類関数という. 類関数全体の集合は線形空間であること, および次元と基底の一つを求めよ.

- (3) 上の空間に次のような内積を入れる.

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)g(x^{-1})$$

既約表現に付随する指標全体はこの内積に関して正規直交基底であることを示せ.

- (4) 有限群 G の既約表現の個数は共役類の個数に等しいことを示せ.