数学概論B (吉田担当) レポート問題

[1] G を有限アーベル群，H をその部分群，f を G 上の関数で $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathcal{R}$ に値を取るものとする．このとき

$$\frac{1}{|H|}\sum_{h\in H} f(h) = \frac{1}{(G:H)}\sum_{\lambda\in(G/H)^\wedge}\langle f,\lambda\rangle$$

(Poisson の和公式) を示せ．ここで $(G/H)^\wedge$ は，H で 1 になる G の指標全体．$(G:H) := |G|/|H|$ は指数 (自然数になる)．

[2] $F := \{0,1\}$，$V := F^n$ で，C を V の部分群 (符号) とする．f を V 上の関数で $\mathbb{C}$-ベクトル空間 $\mathcal{R}$ に値を取るものとする．このとき，Hadamard 変換

$$\widetilde{f}(u) := \sum_{v\in V}(-1)^{\langle u,v\rangle} f(v) \quad (u\in V)$$

についての Poisson の和公式

$$\sum_{v\in C^\perp} f(v) = \frac{1}{|C|}\sum_{u\in C}\widetilde{f}(u)$$

を定義から直接証明せよ．ここで $C^\perp := \{v\in V \mid \langle u,v\rangle = 0\}$．

[3] G を有限アーベル群，λ,β を G 上の複素数値関数とする．

$$\langle \alpha,\beta\rangle = \sum_{\lambda\in\widehat{G}}\langle\alpha,\lambda\rangle\langle\lambda,\beta\rangle.$$

(Parseval の等式) を示せ：

[4] 整数 h,k (ただし $k\geq 1$) に対し，デデキントの和を

$$\begin{aligned} s(h,k) &:= \sum_{j=1}^{k-1}\left(\left(\frac{hj}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{j}{k}\right)\right) \\ ((x)) &:= \begin{cases} x-[x]-1/2 & (x \text{ が整数でない}) \\ 0 & (x \text{ は整数}) \end{cases} \end{aligned}$$

で定義する．また，G を位数 m の巡回群，λ をその指標，m を λ の (指標群における) 位数，r を整数とし，G 上の複素数値関数を

$$\Delta_A[\lambda] := \sum_{j=1}^{m-1}\left(\frac{j}{m}-\frac{1}{2}\right)\lambda^j$$

で定義する．

(1) $\langle \Delta_A[\lambda], \Delta_A[\lambda^r] \rangle = s(r,m)$ を示せ．
(2) $s(1,m) = (m-1)(m-2)/12m$ を示せ．
(3) m, n が互いに素な自然数のとき，$s(m,n) + s(n,m)$ は m, n の有理式であることが知られている．その有理式を求めよ．
(4) この等式を証明せよ (かなり難問)．

[5] 位数 p^m (p は素数で $m = 1, 2, 3, 4$) のアーベル群 (の同型類) を列挙せよ．$m \le 3$ について，それらの群について，自己同型群の位数を求めよ．

[6] A, B を加法群とする．A から B への準同型写像の集合を $\mathrm{Hom}(A,B)$ で表す．$f, g \in \mathrm{Hom}(A,B)$ の和 $f+g \in \mathrm{Hom}(A,B)$ を，$(f+g)(a) = f(a) + g(a)$ で定義すれば，$\mathrm{Hom}(A,B)$ も加法群になることを示せ．位数 p^3 の加法群 (同型を除いて 3 個ある) 同士の $|\mathrm{Hom}(A,B)|$ を求めよ．1

[7] p を素数とし，A は位数が p のベキのアーベル群を表す．$m = 1, 2, 3$ について，$\displaystyle\sum_{\mathrm{rk}(A)=m} |A|^{-1}$ と $\displaystyle\sum_{|A|=p^m} \frac{1}{|\mathrm{Aut}(A)|}$ を直接求めよ．

[8] a_n を対称群 S_n における $\pi^2 = 1$ の解の個数とする (ただし $a_0 := 1$)．a_n が 2 で割り切れる回数を $\nu(a_n)$ と置く．

(1) $\mu(a_n)$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) はどのような数列になるか．小さな n での値から予想を立てよ．
(2) その予想を確かめよ．
(3) $\pi^p = 1$ (p は素数) の解の個数の p で割り切れる回数についてはどうか (未解決)．