

数学概論 B レポート問題 (坂上担当分)

平成 15 年 10 月 22 日

問題 1 $f \in C^l[0, n]$ とする. この時

(1) 次の関係を示せ.

$$\frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(x)dx = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) f'(x+k)dx$$

(2) (1) の計算を l 階繰り返して, 次の関係を示せ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(k) + f(k+1)) - \int_k^{k+1} f(x)dx &= \sum_{i=2}^l (-1)^i [b_i(1)f^{(i-1)}(k+1) - b_i(0)f^{(i-1)}(k)] \\ &\quad + (-1)^{l+1} \int_0^1 b_l(x)f^{(l)}(x+k)dx, \end{aligned}$$

ただし, $b_i(x)$ は次のように定義される多項式である ($c_i(x)$ は積分定数).

$$\begin{aligned} b_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ b_i(x) &= \int_0^x b_{i-1}(t)dt + c_i(x), \quad (i = 2, \dots, l). \end{aligned}$$

(3) 積分定数 c_i を次のように選ぶものとする.

$$c_i = - \int_0^1 \int_0^x b_{i-1}(t)dt dx.$$

この時, $b_i(1) = b_i(0)$ を示し, さらに (2) を使って次が成り立つことを示せ.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(0) + f(n)) + \sum_{k=1}^{n-1} f(k) - \int_0^n f(x)dx &= \sum_{i=2}^{l-1} (-1)^i b_i(0)[f^{(i-1)}(n) - f^{(i-1)}(0)] \\ &\quad + (-1)^{l+1} \int_0^1 [b_l(x) - b_l(0)] \sum_{k=0}^{n-1} f^{(l)}(x+k)dx. \end{aligned}$$

問題2 $f(z)$ が実軸の近傍 $\{z \mid |\operatorname{Im} z| < d\}$ で解析的な関数とする時, 次の関係を示せ.

$$\frac{1}{2i} \int_R f(z) \cot \frac{\pi z}{h} dz = h \sum_{k=-N}^N f(kh).$$

ただし, i は虚数単位とし, $c < d$ として積分経路 R は次で与えられているものとする.

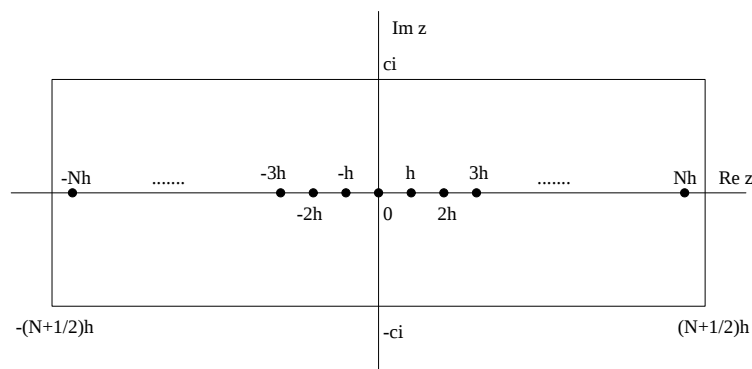


図 1: 積分経路 R

問題3 広義積分

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

を台形公式と二重指数型公式を使って数値積分し, 区間の分割点 N に対して, 近似誤差がどのように減少するかをグラフにして示せ.

問題4 「計算機と数学」という話題について, 計算機が数学の研究においていかなる役割を果たしうるかを論ぜよ. 但しこのレポートは A4 で二枚以上を最低要件とする.