

楕円曲線とモジュライ — レポート問題

北海道大学 中村 郁

1. 楕円の弧長を表す積分

$$\ell(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} d\phi$$

を以下の手順にしたがって求めよ.

(1) つぎを証明せよ.

$$\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2 (2n-1)} k^{2n} \sin^{2n} \phi$$

(2) つぎを証明せよ.

$$\ell(k, \pi/2) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{((2n)!)^2}{2^{4n} (n!)^4 (2n-1)} \cdot k^{2n}.$$

2. $x = \frac{1}{u+1}$ として積分

$$I = \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}}$$

を x の積分に書き改めよ.

3.

$$C : y^2 + xy = x^3 - \frac{36}{a}x - \frac{1}{a} \quad (1)$$

とする。座標を取りかえて,

$$E : y^2 = x^3 - (c_4/48)x - c_6/864 \quad (2)$$

の形にせよ. このとき不変量

$$j(E) = c_4^3/\Delta, \quad \Delta = (c_4^3 - c_6^2)/1728 \quad (3)$$

を求めよ.