

# 円周率 $\pi$ について

松本 圭司 (Keiji MATSUMOTO)

January 31, 2011

## Abstract

このノートは、北海道大学理学部において平成 19 年前期に開講された講義「現代数学への招待」で紹介された円周率  $\pi$  に関するいくつかの性質をまとめたものである。

## Contents

<b>1</b>	<b>微積分学の復習</b>	<b>2</b>
1.1	高校での $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明	2
1.2	Riemann 積分	4
1.3	曲線の長さ	7
1.4	$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明の修正	9
1.5	逆三角関数の定義	10
1.6	$\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$ の別証明	11
<b>2</b>	<b>円周率 <math>\pi</math> の非有理性</b>	<b>12</b>
2.1	円周率の定義	12
2.2	Niven の証明	13
<b>3</b>	<b>円周率の近似計算</b>	<b>16</b>
3.1	$\tan^{-1}$ の Taylor 展開	16
3.2	Machin の公式	17
3.3	算術幾何平均による近似計算	18
3.4	その他の $\pi$ の表示	20
<b>4</b>	<b>レポート問題</b>	<b>21</b>

## 1 微積分学の復習

この講義では三角関数の微積分を頻繁に利用する予定であるが、その根源にあるともいえる公式が

$$(1) \quad \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

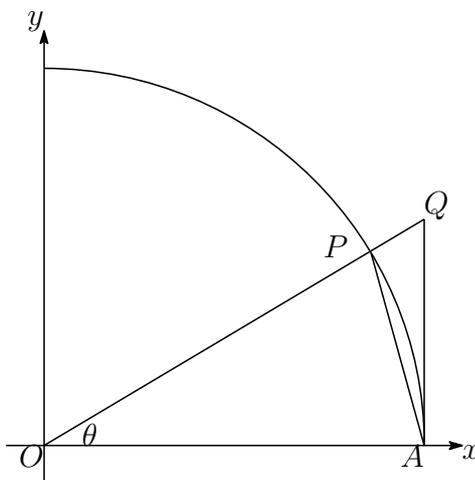
である。しかし、高校の数学の授業で習った証明には欠陥がある。それを是正し三角関数の微積分が自由に使えるようにするために、大学で習った微積分学の復習をしておく。

### 1.1 高校での $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明

まず、高校の数学で習った極限公式 (1) の証明を思い出してみよう。

高校で習った証明

まず  $\theta > 0$  と仮定する。下図において三角形  $OAP$  は扇形  $OAP$  に含まれ、扇形  $OAP$  は三角形  $OAQ$  に含まれる。



$$\begin{aligned} O &: (0, 0) \\ A &: (1, 0) \\ P &: (\cos \theta, \sin \theta) \\ Q &: (1, \tan \theta) \end{aligned}$$

これらの図形の面積を考えることで、不等式

$$\frac{\sin \theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan \theta}{2}$$

が得られる。上記の不等式の各項に  $2/\sin \theta$  をかけると

$$(2) \quad 1 < \frac{\theta}{\sin \theta} < \frac{1}{\cos \theta}$$

が得られる。この不等式で  $\theta \rightarrow 0$  とすると  $\cos \theta \rightarrow 1$  となるので、はさみうちの原理より、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{\sin \theta} = 1$  となり、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  が得られる。 $\frac{\sin(-\theta)}{-\theta} = \frac{\sin \theta}{\theta}$  なので、 $\theta < 0$  での極限も同じ値となる。□

この証明における不備は、扇形  $OAP$  の面積が  $\frac{\theta}{2}$  となるところにある。もう少し詳しく説明すると、扇形の面積の公式

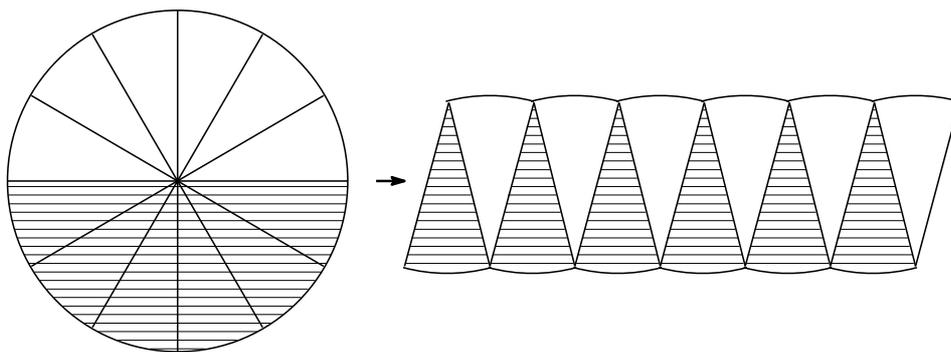
$$\text{扇形の面積} = (\text{弧長} \times \text{半径}) \div 2$$

を導く際に、 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  という事実を用いているところにある。証明しようとしている事柄を用いて得られる事実は、その事柄自体の証明では使ってはいけないのである。中学校で習った扇形の面積の公式は、基本的に小学校で習った円の面積の公式

$$\text{円の面積} = \pi \times (\text{半径})^2$$

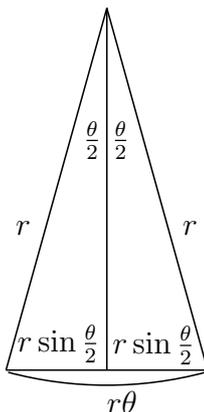
より得られるので、その求め方を思い出しその際に  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  を用いていることを確認する。

下図のように半径  $r$  の円を上下で切り離して  $2n$  等分した扇形を交互にはめていく。



円の面積は等分した扇形の弧を弦に代えてできる三角形の面積の和  $S$  で近似でき、 $n$  を大きくすると  $S$  は円の面積に収束する。 $n$  を大きくしたとき

三角形を合わせた図形は、高さが円の半径  $r$  で底辺が半円の長さ  $\pi r$  の平行四辺形に近づくので、その面積は  $\pi r^2$  へ近づく。これが小学校で習った説明であるが、 $n$  が大きくなると扇形の弦の長さの和と半円の長さが同じ値に近づくという主張が、扇形の中心角  $\theta$  が  $\theta \rightarrow 0$  のとき扇形の弦の長さ  $2r \sin \frac{\theta}{2}$  と扇形の弧の長さ  $r\theta$  の比が 1 となる、つまり  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  と同値なわけである。



極限の公式  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  を証明するには、やはり曲線の長さを極限で定義する必要がある。以下で Riemann 積分の復習をして、円弧の長さを積分で表示してしまえば容易に上記の公式を示せることを紹介する。積分を用いない証明は講義では紹介しなかったが、§1.6 に掲載しておく。

## 1.2 Riemann 積分

大学で習う Riemann 積分は、微分とは全く独立に極限で定義される。高校で習った積分のことは全て忘れないと理解に苦しむことになる。なぜこのように設定するかは微積分学の基本定理を紹介した後に説明する。

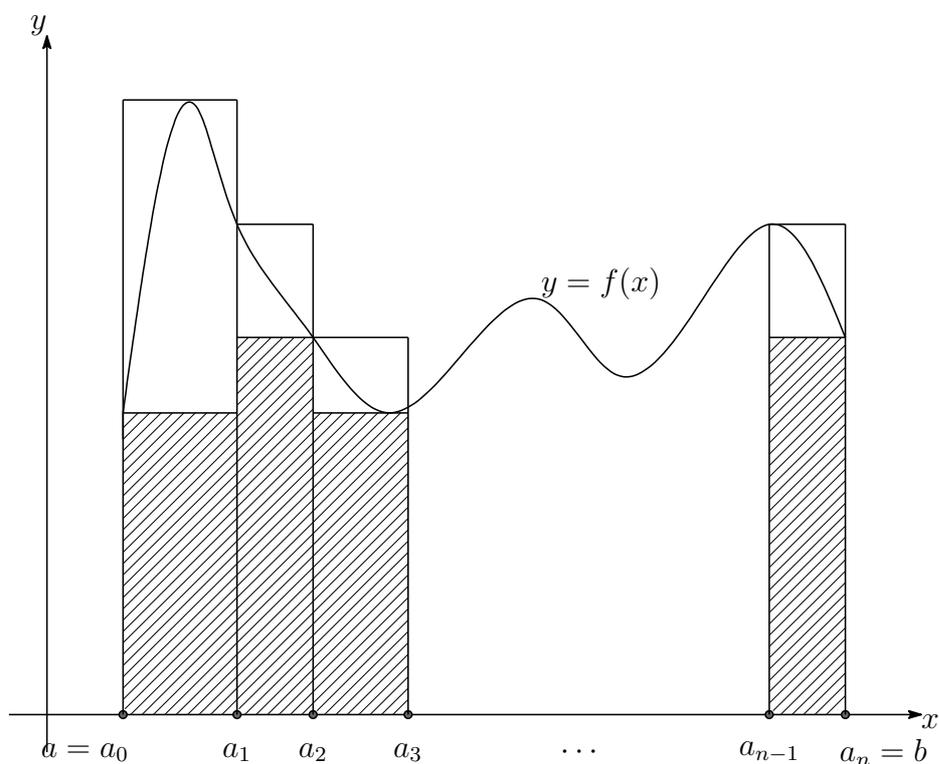
閉区間  $[a, b]$  上の有界な関数  $f(x)$  の Riemann 積分の定義を与える。基本的な考え方は  $f(x) \geq 0$  をみたく連続関数に対して、縦線形と呼ばれる集合

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

の面積という概念を極限できっちり定めようということである。

閉区間  $[a, b]$  を  $n$  個の区間の和集合  $\cup_{k=1}^n I_k$  として表す、ここで  $I_k = [a_{k-1}, a_k]$  とし、 $[a, b]$  の分割  $\Delta$  を

$$\Delta : a = a_0 < a_1 < a_2 \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$



で与える。この分割  $\Delta$  に対し、

$$R_{\Delta} = \sum_{k=1}^n \sup_{x \in I_k} (f(x))(a_k - a_{k-1}),$$

$$r_{\Delta} = \sum_{k=1}^n \inf_{x \in I_k} (f(x))(a_k - a_{k-1}),$$

とする。  $r_{\Delta}$  は上図の斜線で塗られた長方形たちの面積の和であり、  $R_{\Delta}$  は  $r_{\Delta}$  に白い長方形たちの面積の和を加えたものである。ゆえに、任意の分割  $\Delta$  に対して

$$\inf_{x \in [a,b]} (f(x))(b - a) \leq r_{\Delta} \leq R_{\Delta} \leq \sup_{x \in [a,b]} (f(x))(b - a)$$

が成立している。あらゆる分割  $\Delta$  を考えて

$$r = \sup_{\Delta} (r_{\Delta}), \quad R = \inf_{\Delta} (R_{\Delta})$$

とする。一般には  $r \leq R$  をみたすが  $r = R$  となる時  $f(x)$  は、 $[a, b]$  上 Riemann 積分可能 (または単に積分可能) であるといい、この値  $r$  を  $f(x)$  の  $[a, b]$  での積分値といい

$$\int_a^b f(x)dx$$

で表す。定義より下記の性質を導くことができる。

**Proposition 1** 閉区間  $[a, b]$  上で関数  $f(x), g(x)$  が積分可能とする。

(0) 定数関数  $\alpha$  は  $[a, b]$  上で積分可能で

$$\int_a^b \alpha dx = \alpha(b - a).$$

(1) 任意の定数  $\alpha, \beta$  に対して、 $[a, b]$  上で  $\alpha f(x) + \beta g(x)$  は積分可能で以下の等式をみたす。

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)dx.$$

(2)  $a < c < b$  をみたす  $c$  に対して  $f(x)$  は  $[a, c], [c, b]$  上で積分可能で以下の等式をみたす。

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x) + \int_c^b f(x)dx.$$

(3) 閉区間  $[a, b]$  上で  $f(x) \geq g(x)$  ならば

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

積分の定義やいくつかの性質は与えたものの、定義から直接積分値を求めることは困難であるばかりか、どのような関数が積分可能であるかさえもすぐにはわからない。その難点を解決し、微分との関係を与えるのが微積分学の基本定理である。

**Theorem 1** (微積分学の基本定理)

(1) 関数  $f(x)$  が  $[a, b]$  上で連続ならば  $f(x)$  は  $[a, b]$  上積分可能。

(2) 閉区間  $[a, b]$  上の連続関数  $f(x)$  に対して、 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$  をみたす関数  $F(x)$  がみつければ  $f(x)$  の  $[a, b]$  での積分値は

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

で求めることができる。

微積分学の基本定理の (1) を証明することが大変であるが、それが示されてしまえば (2) は容易に得られる。閉区間  $[a, b]$  上の連続関数  $f(x)$  に対して、 $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$  をみたす関数  $F(x)$  を  $f(x)$  の原始関数という。閉区間  $[a, b]$  上の 0 以上の値をとる連続関数  $f(x)$  に対して、縦線形

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}$$

の面積を  $\int_a^b f(x)dx$  で定める。

高校では原始関数のことを不定積分と呼んでいて、積分するということは原始関数を求めることを意味していた。定積分を微積分学の基本定理の (2) 式で定義していた。縦線形  $D$  の面積という概念は、小学校で円の面積について習いわかったつもりになったものとして取り扱っている。高校で習ったように面積や体積を求める計算として積分を用いる分には、このような設定でも大きな破綻は生じない。しかし、原始関数の具体形が既知の関数で表示できない場合 (たとえば  $\exp(-x^2)$  の原始関数)、積分するという意味をどうとるのかは問題になる。新しい設定では被積分関数が考えている区間で連続ならば、原始関数の具体形がわからなくても議論でき新しく関数を定義することもできる。

実は、極限で定義されたものは取り扱い要注意であり、どういう操作が許されるかを整理したところに積分の定義変更の真の狙いがある。特に積分と別の極限との順序交換を行う際に、このように設定した威力が発揮される。

ともかく積分はある種の極限として設定され、原始関数を求めることはその値を求めるための手段であるという意識改革をしてもらいたい。

### 1.3 曲線の長さ

閉区間  $[a, b]$  上の連続関数  $x(t), y(t)$  に対して、写像

$$\gamma : [a, b] \ni t \mapsto (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$$

を曲線という。関数  $x(t), y(t)$  がともに  $[a, b]$  上で  $C^1$  級するとき ( $[a, b]$  上で微分可能かつ導関数が連続)、曲線  $\gamma$  は  $C^1$  級であるという。さらに  $\frac{dx}{dt}(t) =$

$\frac{dy}{dt}(t) = 0$  となる点  $t$  が  $[a, b]$  内に存在しないとき、滑らかであるという。曲線  $\gamma$  に対して、区間  $[a, b]$  の分割

$$\Delta : a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$$

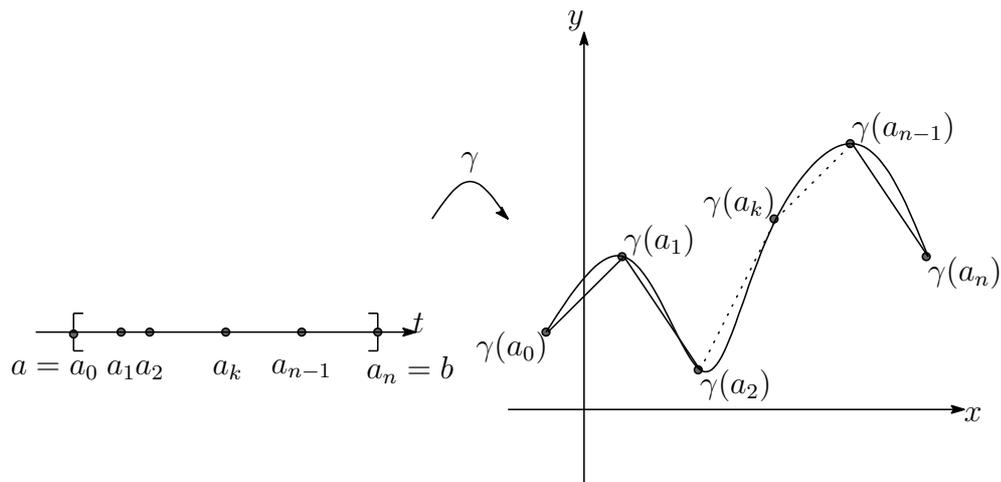
で定まる折線  $\cup_{k=1}^n L_{\Delta,k}(\gamma)$  の長さを

$$\ell(\Delta) = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x(a_k) - x(a_{k-1}))^2 + (y(a_k) - y(a_{k-1}))^2}$$

とする、ここで  $L_{\Delta,k}(\gamma)$  は、 $\mathbb{R}^2$  内の点  $\gamma(a_{k-1})$  と  $\gamma(a_k)$  を結ぶ線分とする。あらゆる分割  $\Delta$  を考えて

$$\ell = \sup_{\Delta} \ell(\Delta)$$

が有限の値になるときに、曲線  $\gamma$  には長さが定まるといい、曲線  $\gamma$  の長さを  $\ell$  で定める。長さが定まらない曲線が存在する。レポート問題 [1](#), [2](#) を参照。



曲線  $\gamma$  が  $C^1$  級するとき、平均値の定理より开区間  $(a_{k-1}, a_k)$  内の点  $t_k$  で

$$\frac{x(a_k) - x(a_{k-1})}{a_k - a_{k-1}} = x'(t_k)$$

をみtasのもが存在するので、以下の定理が得られる。

Theorem 2  $C^1$  級曲線  $\gamma$  には必ず長さが定まり、 $\gamma$  の長さは

$$\int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

である。

### 1.4 $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$ の証明の修正

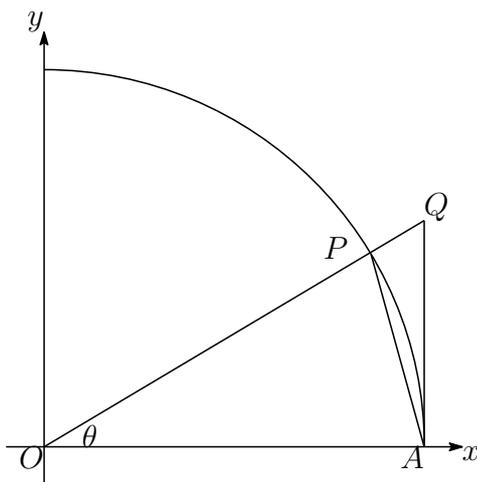
不等式

$$\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$$

を曲線の長さの定義より導き出せさえすればよい。下図において、円弧  $\widehat{AP}$  は、 $C^1$  級写像

$$\gamma : [0, b] \mapsto (\sqrt{1-y^2}, y) \in \mathbb{R}^2$$

の像である。その長さ  $\theta$  は



- $O : (0, 0)$
- $A : (1, 0)$
- $P : (a, b)$
- $Q : (1, b/a)$

$$\theta = \int_0^b \sqrt{(\sqrt{1-y^2})' ^2 + (y')^2} dy = \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

である。被積分関数  $f(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$  は閉区間  $[0, b]$  上で狭義単調増加なので

$$1 = f(0) \leq f(y) \leq f(b) = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}} \quad (y \in [0, b])$$

をみたく。積分の性質より

$$b = \int_0^b 1 dy \leq \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} \leq \int_0^b \frac{dy}{\sqrt{1-b^2}} = \frac{b}{a}$$

となり、

$$\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$$

が得られる。あとは §1.1 で紹介したとおりでよい。

## 1.5 逆三角関数の定義

円弧の長さの積分表示より、逆三角関数  $\text{Sin}^{-1}$  と  $\text{Tan}^{-1}$  が以下のように定義される。

$$\begin{aligned}\text{Sin}^{-1}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in (-1, 1), \\ \text{Tan}^{-1}(x) &= \text{Sin}^{-1}(x/\sqrt{1+x^2}), \quad x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

微積分学の基本定理と合成関数の微分法より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \text{Sin}^{-1}(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \frac{d}{dx} \text{Tan}^{-1}(x) &= \left( \frac{1}{\sqrt{1-(x/\sqrt{1+x^2})^2}} \right) \left( \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)' = \frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

となる。また  $\text{Tan}^{-1}(0) = 0$  と微積分学の基本定理より

$$\text{Tan}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

と表示できる。

三角関数  $\sin, \tan$  は既知の関数として扱ってきたが、逆三角関数の単調性よりその逆関数として定義することができる。そのように設定すると最初は定義域が制限された関数となってしまうが、円の対称性を利用し  $\sin$  は定義域を  $\mathbb{R}$  に拡張できる。この設定では極限の公式  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  はほぼ自明な式となる。実際、

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = \sin'(0) = \frac{1}{(\text{Sin}^{-1})'(0)} = \sqrt{1-x^2}|_{x=0} = 1$$

であるし、三角関数の種々の公式は逆三角関数の定義式より導くことができる。

## 1.6 $\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$ の別証明

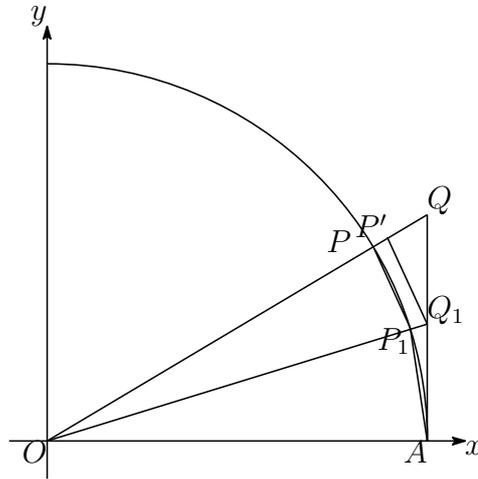
不等式

$$\sin \theta \leq \theta \leq \tan \theta$$

を積分を用いて示したが、曲線の長さの定義からも導き出せる。下図において円弧  $\widehat{AP}$  の長さ  $\theta$  は、その上に分点たち  $\Delta$  をとりそれらを結んでできる折線  $L(\Delta)$  の長さ  $\ell(\Delta)$  を考え、あらゆる  $\Delta$  に関する  $\ell(\Delta)$  の上限

$$\theta = \sup_{\Delta} \ell(\Delta)$$

として定義されている。線分  $AP$  も円弧  $\widehat{AP}$  を近似する折線の 1 つとみな



され、その長さ  $l_0$  は、点  $P$  の  $y$ -座標  $\sin \theta$  より大きい。ゆえに

$$\sin \theta < l_0 \leq \sup_{\Delta} \ell(\Delta) = \theta$$

である。次に  $\tan \theta$  があらゆる折線  $L(\Delta)$  に対して

$$(3) \quad \ell(\Delta) < \tan \theta = \overline{AQ}$$

をみたすことを分点の個数  $n$  に関する帰納法で示す、ここで  $\overline{AQ}$  は線分  $AQ$  の長さを表す。

分点の個数  $n$  が 0, つまり円弧  $\widehat{AP}$  を線分  $AP$  で近似した場合  $\overline{AP} \leq \overline{AQ}$  が成立することを示す。前図において三角形  $APQ$  は  $P$  を鈍角とする三角形である。余弦定理より

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 - 2 \cos(P) \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PQ} \geq \overline{AP}^2$$

より、不等式 (3) は成立する。

分点の個数が  $n - 1$  で不等式 (3) が成立したと仮定し、分点の個数が  $n$  でも不等式 (3) が成立することを示す。円弧  $\widehat{AP}$  上の分点を  $P$  に近い方から  $P_1, \dots, P_n$  とする。帰納法の仮定より

$$(4) \quad \ell(\Delta_1) < \overline{AQ_1}$$

が成立する、ここで  $\ell(\Delta_1)$  は、線分  $P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n, P_nA$  でできる折線の長さを表し、点  $Q_1$  は直線  $OP_1$  と線分  $AQ$  の交点とする。線分  $PP_1$  の長さより線分  $QQ_1$  の長さが大きいことを示す。点  $P'$  を線分  $PQ$  と  $Q_1$  を通り線分  $PP_1$  と平行な直線との交点とする。三角形  $OPP_1$  と三角形  $OP'Q_1$  は相似なので  $\overline{PP_1} < \overline{P'Q_1}$  である。三角形  $P'QQ_1$  は  $P'$  を鈍角とする三角形なので  $\overline{P'Q_1} < \overline{QQ_1}$  である。ゆえに  $\overline{PP_1} < \overline{QQ_1}$  である。不等式 (4) とあわせて

$$\ell(\Delta) = \overline{PP_1} + \ell(\Delta_1) < \overline{QQ_1} + \overline{AQ_1} = \overline{AQ}$$

が得られる。

不等式 (3) と上限の性質より

$$\theta = \sup_{\Delta} \ell(\Delta) \leq \tan \theta$$

が成立する。

## 2 円周率 $\pi$ の非有理数性

### 2.1 円周率の定義

円周率  $\pi$  を

$$6 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

で定める。岩波の数学辞典 [6] では

$$\pi = 2 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

という広義積分を定義としている。この講義では時間の都合により、広義積分を復習できなかったのでこの定義は意図的に避けた。これらの定義は、円弧の長さに基づいたものである。三角関数  $\sin x$  の定義より、以下の命題が得られる。

**Proposition 2** 円周率  $\pi$  は  $\sin x = 0$  となる最小の正数である。

一方、円の面積に基づいて円周率

$$\pi = 2 \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

を定義することもできる。この定義からだと上記の命題を得るには多少の議論を要する。

三角関数  $\sin x$  をべき級数

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

で定義して、 $\sin x = 0$  となる最小の正数を円周率  $\pi$  と定義している文献 [13] もある。

**Theorem 3** 円周率  $\pi$  は無理数である。

1761年に J.H. Lambert がこの定理を証明したと岩波の数学辞典 [6] には記載されている。文献 [7] には、その証明には誤りがあり、1794年に A.M. Legendré によるものが最初であると記載されている。Legendré は  $\pi^2$  が無理数であることも合わせて証明している。1882年に F. Lindemann が  $\pi$  はいかなる整数係数の代数方程式の根となりえないこと、つまり  $\pi$  が超越数であることを [3] で証明している。ここでは 1946年に I. Niven により発表されたこの定理の証明 [5] を紹介する。ここで紹介した事柄についての原論文は、文献 [1] にすべて収録されている。

## 2.2 Niven の証明

まず、Lemma をひとつ用意する。

**Lemma 1** 整数係数の多項式  $g(x)$  の  $j$  次導関数  $g^{(j)}(x)$  の全ての係数は、 $j!$  で割り切れる。

この Lemma を証明することをレポート問題 $\boxed{3}$ とする。

*Niven's Proof.* 円周率  $\pi$  が有理数  $\frac{a}{b}$  ( $b > 0$ , 既約分数) であると仮定して、矛盾を導く。自然数  $n$  に対して、 $2n$  次多項式  $f(x)$  を

$$(5) \quad f(x) = \frac{b^n}{n!} x^n (\pi - x)^n$$

で定める。 $f(x)$  と  $\sin x$  は閉区間  $[0, \pi]$  で 0 以上の連続関数なので、

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx > 0$$

である。関数  $x^n$  と  $(\pi - x)^n$  の閉区間  $[0, \pi]$  上での最大値はともに  $\pi^n$  なので、 $[0, \pi]$  上で

$$0 \leq f(x) \sin x \leq f(x) \leq \frac{b^n}{n!} \pi^n \pi^n = \frac{(\pi^2 b)^n}{n!}$$

である。したがって、不等式

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \pi \cdot \frac{(\pi^2 b)^n}{n!}$$

が得られる。任意の正数  $c$  に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

なので (レポート問題 $\boxed{4}$  この事実を示せ)、 $c = \pi^2 b$  に対して、自然数  $n$  を

$$\frac{(\pi^2 b)^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$$

となるように選ぶことができる。この不等式をみたす十分大きな自然数  $n$  に対しては

$$(6) \quad 0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \pi \cdot \frac{(\pi^2 b)^n}{n!} < 1$$

となる。

一方、部分積分を繰り返し行うことで、下記の等式が得られる。

$$\begin{aligned}
 \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= [f(x)(-\cos x)]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\
 &= (f(\pi) + f(0)) + [f'(x) \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi f^{(2)}(x) \sin x dx \\
 &= (f(\pi) + f(0)) - \int_0^\pi f^{(2)}(x) \sin x dx \\
 &= (f(\pi) + f(0)) - (f^{(2)}(\pi) + f^{(2)}(0)) + \int_0^\pi f^{(4)}(x) \sin x dx \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)) + (-1)^{n+1} \int_0^\pi f^{(2n+2)}(x) \sin x dx \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)).
 \end{aligned}$$

ここで  $f(x)$  は  $2n$  次多項式なので  $f^{(2n+2)}(x) = 0$  であることに注意する。  
 背理法の仮定  $\pi = \frac{a}{b}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ) より得られる

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$$

という本来ありえない式から

$$(7) \quad \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0))$$

が整数になることを示す。  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  に対して、  $f^{(k)}(x)$  は  $x$  で割り切れるので  $f^{(k)}(0) = 0$  である。  $k = n, n+1, \dots, 2n$  に対して、 Lemma 1 の  $g(x)$  を  $x^n(a - bx)^n$  とみなせば、  $g^{(k)}(x)$  のすべての係数は  $k!$  で割り切れるので、とくに  $n!$  でも割り切れる。ゆえに  $f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} g^{(k)}(x)$  は、整数係数の多項式となり  $f^{(k)}(0)$  は整数となる。さらに、  $f$  の定義式 (5) より

$$f(x) = f(\pi - x)$$

である。この式の両辺を  $x$  で  $k$  回微分すると

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$$

なので

$$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

であり、  $k = 0, 1, \dots, 2n$  に対して  $f^{(k)}(\pi)$  が整数であることがわかる。したがって、等式 (7) の右辺は整数となり、不等式 (6) に矛盾する。  $\square$

### 3 円周率の近似計算

#### 3.1 $\text{Tan}^{-1}$ の Taylor 展開

項別積分を利用して、

$$\text{Tan}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

の Taylor 展開 を求める。等比級数の公式より  $-1 < t < 1$  に対して

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots + (-1)^n t^{2n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}$$

が成立する。ゆえに  $-1 < x < 1$  に対して

$$\begin{aligned} \text{Tan}^{-1}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \end{aligned}$$

が得られる。積分と無限級数の順序交換を項別積分と呼ぶが、実はこの交換は一般には許されない。レポート問題の [5] を参照。べき級数に関しては収束半径の内側での積分に関しては許されることが知られている。

上記の等式において、 $x \rightarrow 1$  とする極限を考える。微積分学の基本定理より  $\text{Tan}^{-1}$  は微分可能な関数であり連続なので  $\lim_{x \rightarrow 1} \text{Tan}^{-1}(x) = \text{Tan}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$  である。一方、級数において  $x = 1$  とした場合、

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

であり、一般項が 0 へ収束する交代級数なので収束する。Able の収束性定理よりこの級数の値は  $\text{Tan}^{-1}(1)$  と一致することが知られている。

以上のことを Lemma としてまとめておく。

#### Lemma 2

$$\text{Tan}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x \leq 1).$$

とくに

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

この級数により円周率の近似値が計算できるが、収束が遅く実用的でない。実際に部分和

$$S(N) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

の値は以下のようなになる。

$N$	$S(N)$	$S(N) - \pi$
$10^1$	3.232315809	0.090723155
$10^2$	3.151493401	0.009900747
$10^3$	3.142591654	0.000999000
$10^4$	3.141692644	0.000099990
$10^5$	3.141602653	0.000009999

$N$  を 10 倍すると精度がだいたい 1 桁よくなるという状況であることがわかる。講義では部分和を計算するプログラムを用意しておき、計算機による実演をプロジェクターで投影した。

## 3.2 Machin の公式

Theorem 4 (Machin)

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}.$$

*Proof.* (文献 [4] p.157 問題 6.2.5)  $\tan \theta = \frac{1}{5}$  となる  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  に対して、

$$\tan 4\theta = \frac{120}{119}, \quad \tan\left(4\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{239}$$

が成立する。ゆえに

$$\frac{\pi}{4} = 4\theta - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{239} = 4 \cdot \text{Tan}^{-1} \frac{1}{5} - \text{Tan}^{-1} \frac{1}{239}$$

が得られる。この等式に Lemma 2 にある  $\text{Tan}^{-1}$  の Taylor 展開を用いればよい。□

Remark 1 *Machin* (1685年–1751年)は、数学者でなく天文学者であった。三角関数表を眺めているうちにこの公式に気づいたといわれている。

円周率  $\pi$  の近似計算において Machin の公式がいかに強力であるかは実際に計算機で計算するとよくわかる。部分和

$$M(N) = 16 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}$$

の値は以下のようになる。

$N$	$M(N)$	$M(N) - \pi$
1	3.140597029	-0.000995625
2	3.141621029	0.000028375
3	3.141591772	$-0.882 * 10^{-6}$
4	3.141592682	$0.28 * 10^{-7}$
5	3.141592653	$-0.1 * 10^{-8}$

$N = 5$  で小数第 8 位まで一致し、 $N$  が 1 増えると精度がだいたい 1 桁よくなるという状況であることがわかる。約 30 年ぐらい前までは、この公式によって円周率の近似計算が行われていた。

### 3.3 算術幾何平均による近似計算

1976 年に Brent と Salamin が算術幾何平均を用いて円周率  $\pi$  の値を効率よく計算する手段を発表した。

まず  $a > b > 0$  なる 2 つの実数  $a, b$  の算術幾何平均  $AGM(a, b)$  の定義を与える。2 つの数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  を初項を  $a_0 = a, b_0 = b$  で与え、漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

により定める。相加平均と相乗平均の関係より  $a_n > b_n$  であり、 $a_{n+1}$  と  $b_{n+1}$  は  $a_n$  と  $b_n$  の平均であることから  $a_{n+1} < a_n, b_{n+1} > b_n$  である。ゆえに

$$b = b_0 < b_1 < \dots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \dots < a_1 < a_0 = a$$

であり、 $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  はともに有界な単調数列なので収束する。そこで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

とにおいて、等式  $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$  の  $n \rightarrow \infty$  の極限を考えると

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

なので、 $\alpha = \beta$  となる。 $a$  と  $b$  を初項とする数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  の共通の極限  $\alpha$  を  $a$  と  $b$  の算術幾何平均といい、 $AGM(a, b)$  で表す。Gauss は算術幾何平均と円周率  $\pi$  との関係を与えた。

**Theorem 5 (Gauss, 1809 年)**

$$\pi = \frac{2AGM(1, \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k c_k^2}$$

ここで、 $a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$  として上記のように数列  $\{a_n\}$  と  $\{b_n\}$  を与え、

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

とする。

この定理の証明には楕円関数論が必要である。興味のある方は文献 [11], [12] を見るとよい。

Brent と Salamin は、Theorem 5 にある円周率  $\pi$  の表示式がとても早く収束し、 $\pi$  の近似計算に威力を発揮することを主張した。収束の早さを計算機による数値計算で確かめる。 $a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  とし、

$$BS(N) = \frac{2a_N}{1 - \sum_{k=0}^N 2^k c_k^2}$$

とする。

$N$	$BS(N)$	$BS(N) - \pi$
1	4	0.8584073464
2	3.1876726427121086	0.04607998912
3	3.141680293297653294	0.00008763970786
4	3.1415926538954464960030	$0.3056532575 * 10^{-9}$
5	3.141592653589793238466360602706	$0.3717219427 * 10^{-20}$

$N = 4$  で小数第 9 位まで一致し、 $N$  が 1 増えると誤差がだいたい 2 乗されていく状況であることがわかる。

### 3.4 その他の $\pi$ の表示

Theorem 6 (Ramanujan, 1914 年)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}$$

Theorem 7 (Chudonovsky 兄弟, 1987 年)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(3n)! (n!)^3} \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}$$

Theorem 8 (Adamchik and Wagon, 1997 年)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} \left( \frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right)$$

Theorems 6, 7 の証明には、保型関数  $j(\tau)$  に関する事実が必要となるのでここでは紹介しない。Theorem 8 は下記のように初等的に証明できる。

*Prrof of Theorem 8. 等比級数の公式*

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - \dots + (-1)^n x^{4n} + \dots \quad (|x| < 1)$$

と項別積分を利用して、 $k = 1, 2, 3$  に対して以下の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1+x^4} dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left( x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{4n+k-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^n}{4n+k} x^{4n+k} \right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (4n+k)}. \end{aligned}$$

この式を利用して、Theorem 8 内の級数を積分で表示する。

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} \left( \frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right) \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2 \cdot 2^{1/2} x^{1-1} + 2 \cdot 2^{2/2} x^{2-1} + 2^{3/2} x^{3-1}}{1+x^4} dx \\ &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}(1+x^2) + 4x}{1+x^4} dx. \end{aligned}$$

変数変換  $x = y/\sqrt{2}$  を行うと上記の積分は

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{2(1 + y^2/2) + 2y}{1 + y^4/4} dy = 4 \int_0^1 \frac{y^2 + 2y + 2}{y^4 + 4} dy \\ &= 4 \int_0^1 \frac{y^2 + 2y + 2}{(y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)} dy = 4 \int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2 + 1} dy \\ &= 4 [\text{Tan}^{-1}(y-1)]_0^1 = \pi \end{aligned}$$

となる。

□

## 4 レポート問題

0 円周率  $\pi$  に関する事項について 200 字以上で述べよ。

1 閉区間  $[0, 1]$  上の関数  $f(x)$  を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x = 0, \\ x \sin \frac{\pi}{2x} & x \in (0, 1], \end{cases}$$

で定める。関数  $f(x)$  は  $[0, 1]$  上で連続だが  $C^1$  級でないことを示せ。

2 曲線  $\gamma$  を

$$\gamma : [0, 1] \ni x \mapsto (x, f(x)) \in \mathbb{R}^2$$

で定める、ここで  $f(x)$  は問題 1 で定めた関数とする。曲線  $\gamma$  には長さが定まらないことを示せ。

(ヒント)  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $P_n = (\frac{1}{n}, f(\frac{1}{n}))$  とし、 $P_n$  と  $P_{n+1}$  を結ぶ線分の長さを  $\ell_{n+1}$  とする。和  $\sum_{k=2}^{n+1} \ell_k$  の  $n \rightarrow \infty$  のときの極限を考えよ。

3 整数係数の多項式

$$g(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, \quad a_0, \dots, a_m \in \mathbb{Z}$$

の  $j$  次導関数  $g^{(j)}(x)$  は、そのすべての係数は  $j!$  で割り切れることを示せ。

4 正定数  $c > 1$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

を示せ。

5 自然数  $n$  に対して、 $\mathbb{R}$  上の関数  $f_n(x)$  を  $\max(\frac{1}{n} - \frac{|x-n|}{n^2}, 0)$  で定める。

(1) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$  を求めよ。

(2) 区間  $[0, \infty)$  内の各  $x$  に対して、極限  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  を求め、  
積分  $\int_0^\infty f(x) dx = \int_0^\infty (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$  の値を求めよ。

6  $\tan \theta = \frac{1}{5}$  をみたす  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  に対して

$$\tan 4\theta = \frac{120}{119}, \quad \tan(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}$$

を示せ。

A [この問題は講義に3回出席した方のみ提出資格を有する]  
講義に関するコメントおよび感想を述べよ。

## 5 現代数学への招待 期末試験

1

理学部 \_\_\_ 年 \_\_\_ 組 (学科) 学籍番号 \_\_\_\_\_ 氏名 \_\_\_\_\_

- (1)  $\tan \theta = \frac{1}{5}$  をみたす  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$  に対して  $\tan 2\theta, \tan 4\theta, \tan(4\theta - \frac{\pi}{4})$  の値を求めよ。

- (2) 積分で定義される  $\mathbb{R}$  上の関数

$$f(x) = \int_0^{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

の導関数  $f'(x)$  を  $x$  の有理関数として表示せよ。

## References

- [1] L. Berggren, J. Borwein and P. Borwein, *Pi: A Source Book* (Second Edition), Springer (1997).
- [2] 金田 康正,  $\pi$  のはなし, 東京図書 (1991).
- [3] F. Lindemann, Über die Zahl  $\pi$ , *Math. Ann.* **20** (1882), 213–225.
- [4] 三宅 敏恒, 入門微分積分, 培風館 (1992).
- [5] I. Niven, A simple proof that  $\pi$  is irrational, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 509.
- [6] 数学辞典, 第 4 版, 日本数学会編集, 岩波書店 (2007).
- [7] A.S. Posamentier and I. Lehmann, 松浦 俊輔 訳, 不思議な数  $\pi$  の伝記, 日経 BP 社 (2005).
- [8] 塩川 宇賢, 無理数と超越数, 森北出版 (1999).
- [9] 高木 貞治, 解析概論, 改訂第 3 版 軽装版, 岩波書店 (1983).
- [10] 高木 貞治, 近世数学史談, 共立出版 (1933).
- [11] 竹之内 修, 伊藤 隆,  $\pi - \pi$  の計算 アルキメデスから現代まで – 共立出版 (2007).
- [12] 梅村 浩, 楕円関数論, 東京大学出版会 (2000).
- [13] 吉田 正章, 私説 超幾何関数 – 対称領域による点配置空間の一意化 –, 共立出版 (1997).

Keiji MATSUMOTO  
Department of Mathematics  
Hokkaido University  
Sapporo 060-0810  
Japan  
e-mail:matsu@math.sci.hokudai.ac.jp