

超幾何関数の幾何学—交点理論

北大 理 松本 圭司

February 23, 2006

1 序

超幾何関数 $F(a, b, c; z)$ は、変数 z に関するべき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

で定義される、ここで a, b, c は複素パラメーターで $c \neq 0, -1, -2, \dots$ とし、 $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ とする。パラメータ a, c が $\operatorname{Re}(a), \operatorname{Re}(c-a) > 0$ をみたすとき、 $F(a, b, c; z)$ は Euler 積分表示

$$F(a, b, c; z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} \int_0^1 t^a (1-t)^{c-a} (1-zt)^{-b} \frac{dt}{t(1-t)}$$

を持つ。この積分表示は、ねじれコホモロジー群の代表元である logarithmic 1-form $d \log \frac{t}{1-t}$ とねじれホモロジー群の代表元である区間 $I = (0, 1)$ とその端点で値が 0 となる関数 $u(t) = t^a (1-t)^{c-a} (1-zt)^{-b}$ との組 $I \otimes u(t)$ との pairing とみなすことができる。ねじれ (コ) ホモロジー群たちには、交点形式という座標 t の取りかたに依存しない幾何学的な pairing がある。これらの交点形式は具体的に値を求めることができ、pairing 間の整合性により超幾何関数間の関係式を生み出す。この関係式の最も簡単な場合が、ベータ関数の反転交式

$$B(p, q)B(-p, -q) = \frac{2\pi i(p+q)}{pq} \frac{1 - e^{2\pi i(p+q)}}{(1 - e^{2\pi ip})(1 - e^{2\pi iq})}$$

である。以下で超幾何関数に関する交点理論の解説を行う。

2 ねじれ Stokes 定理

超幾何関数 $F(a, b, c; z)$ の Euler 積分表示で現れる $\mathbb{C} - \{0, 1, 1/z\}$ 上の多価正則 1 次形式 $u(t)\varphi(t)$ の取り扱いの工夫から始める。区間 I 上では多価関数 $u(t)$ の分枝は一意に定まることに注目する。話の本質をわかりやすくするために多価関数 $u(t)$ とその \log 微分を

$$u(t) = \prod_{j=0}^{n+2} (t - x_j)^{\alpha_j}, \quad \omega = d \log(u(t)) = \sum_{j=1}^{n+2} \frac{\alpha_j dt}{t - x_j}$$

とおいて少しだけ一般化しておく、ここで $x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}$ は相異なる複素数で α_j は $\sum_{j=0}^{n+2} \alpha_j = 0$ をみたす整数でない複素パラメーターとする。集合 $Z = \mathbb{P}^1 - \{x_0, \dots, x_{n+2}\}$ 内の単連結な k 次チェイン D 上の k 次微分形式 ψ と多価関数 $u(t)$ との積の積分 $\int_D u(t)\psi$ を考える。その積分を多価関数 $u(t)$ と ψ と分離し ψ と D と $u(t)$ を組み合わせた $D \otimes u(t)$ との pairing $\langle \psi, D \otimes u(t) \rangle$ とみなす。このルールのもとで Stokes 定理

$$\int_D d(u(t)\psi) = \int_{\partial D} u(t)\psi$$

がどうなるか調べる。左辺は $d(u(t)\psi) = du(t) \wedge \psi + u(t)d\psi = u(t)(\omega \wedge \psi + d\psi)$ となるので、 $\langle \nabla_\omega \psi, D \otimes u(t) \rangle$ となる、ここで $\nabla_\omega = d + \omega \wedge$ は Z 上の 1 価正則 1-form ω によりねじられた外微分作用素とする。一方、右辺は上記のルールに従い、 $\langle \psi, (\partial D) \otimes u(t)|_{\partial D} \rangle$ である。そこでねじれ境界作用素 ∂_ω を $\partial_\omega(D \otimes u(t)) = (\partial D) \otimes u(t)|_{\partial D}$ として定める。

Theorem 1 (ねじれ Stokes 定理)

$$\langle \nabla_\omega \psi, D \otimes u(t) \rangle = \langle \psi, \partial_\omega(D \otimes u(t)) \rangle.$$

$\nabla_\omega \psi = 0$ をみたす k 次微分形式 ψ をねじれ閉 k 次微分形式といい、 k 次チェイン D_j とその上に指定された $u(t)$ の分枝との組の有限和 $\gamma = \sum_{j \in J} D_j \otimes u(t)$ をねじれ k 次チェインといい、 $\partial_\omega(\gamma) = 0$ をみたすものをねじれ k 次サイクルという。

射影直線 \mathbb{P}^1 の座標を $x_0 = \infty, x_{n+1} = 0, x_{n+2} = 1$ になるように選ぶことができる。このように座標を選べば、 $n = 1$ のときに超幾何関数 $F(a, b, c; z)$ の Euler 積分表示は、ねじれ閉 1 次微分形式とねじれ 1 次サイクル上との pairing とみなせる。また、ねじれ微分作用素 ∇_ω を特徴付ける ω は x_j のみに留数 α_j の 1 位極をもつ \mathbb{P}^1 上の有理型微分形式である。超幾何関数の変数 z は ω の \mathbb{P}^1 内の極の配置という形で幾何学的に設定される。また、ねじれ閉 1 次微分形式のねじれ 1 次サイクル上との pairing は基本的には線積分なので、射影座標 t の選び方によらず定まっている。

3 ねじれコホモロジーの交点形式

ねじれ Stokes 定理より、ねじれ閉 1 次微分形式と Z 内の有限和 $\gamma = \sum_{j=0}^N I_j \otimes u(t)$ で与えられるねじれ 1 サイクルとの pairing $\langle \varphi, \gamma \rangle$ に対して、 φ に $\nabla_\omega f$ が加わっても pairing の値は変化しない、つまり

$$\langle \varphi + \nabla_\omega f, \gamma \rangle = \langle \varphi, \gamma \rangle$$

をみたく、ここで f は Z 上の C^∞ 関数とする。そこで 1 次ねじれコホモロジー群と compact な台をもつ 1 次ねじれコホモロジー群を

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}^1 \rightarrow \mathcal{E}^2) / \nabla_\omega(\mathcal{E}^0), \\ H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}_c^1 \rightarrow \mathcal{E}_c^2) / \nabla_\omega(\mathcal{E}_c^0), \end{aligned}$$

で定義する、ここで \mathcal{E}^k と \mathcal{E}_c^k はそれぞれ Z 上の smooth k -forms と Z 上の compact な台をもつ smooth k -forms のなす線型空間とする。パラメーター α_j が整数でないので $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ から $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ への同型 ι_ω が存在し、ともに $(n+1)$ 次元である。

compact な台をもつ 1 次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ と ω の符号を変えて得られる 1 次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{-\omega})$ に交点形式を

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_Z \varphi \wedge \psi$$

で定める。同型 ι_ω を追跡することにより以下の定理が得られる。

Theorem 2 交点形式は非退化であり、 $\varphi_j = d \log \frac{t-x_j}{t-x_{j+1}}$, $\psi_k = d \log \frac{t-x_k}{t-x_{k+1}}$ に対して

$$\langle \varphi_j, \psi_k \rangle = 2\pi i \begin{cases} \frac{-1}{\alpha_j} & \text{if } k = j-1, \\ \frac{\alpha_j + \alpha_{j+1}}{\alpha_j \alpha_{j+1}} & \text{if } k = j, \\ \frac{-1}{\alpha_{j+1}} & \text{if } k = j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

4 ねじれホモロジーの交点形式

ねじれ Stokes 定理より、compact な台をもつねじれ閉 1 次微分形式 φ と Z 内のねじれ 1 次サイクル $\gamma = \sum_{j=0}^N I_j \otimes u(t)$ との pairing $\langle \varphi, \gamma \rangle$ に対して、 γ に $\partial_\omega(G)$ が加わっても pairing の値は変化しない、つまり

$$\langle \varphi, \gamma + \partial_\omega(G) \rangle = \langle \varphi, \gamma \rangle,$$

をみたく、ここで $G = \sum_{j \in J} D_j \otimes u(t)$ は Z 上のねじれ 2 チェインとする。
そこで 1 次ねじれホモロジー群と局所有限 1 次ねじれホモロジー群を

$$\begin{aligned} H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega) &= \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}_1 \rightarrow \mathcal{C}_0) / \partial_\omega(\mathcal{C}_2), \\ H_1(\mathcal{C}_\bullet^{lf}, \partial_\omega) &= \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}_1^{lf} \rightarrow \mathcal{C}_0^{lf}) / \partial_\omega(\mathcal{C}_2^{lf}), \end{aligned}$$

で定義する、ここで \mathcal{C}_k と \mathcal{C}_k^{lf} はそれぞれ Z 上の有限和ねじれ k 次チェインたちと局所有限和ねじれ k 次チェインたちのなす線型空間とする。パラメーター α_j が整数でないので $H_1(\mathcal{C}_\bullet^{lf}, \partial_\omega)$ から $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ への同型 J_ω が存在し、ともに $(n+1)$ 次元である。

1 次ホモロジー群 $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ と ω の符号を変えて得られる局所有限 1 次ホモロジー群 $H_1(\mathcal{C}_\bullet^{lf}, \partial_{-\omega})$ 交点形式を

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \sum_{p \in I_\mu \cap J_\nu} \langle I_\mu, J_\nu \rangle_p [u|_{I_\mu}(p)] [u^{-1}|_{J_\nu}(p)]$$

で定める、ここで $\gamma = \sum_\mu I_\mu \otimes u(t)$, $\delta = \sum_\nu J_\nu \otimes u^{-1}(t)$, p は I_μ と J_ν の交点で $\langle I_\mu, J_\nu \rangle_p$ は p における I_μ と J_ν の位相的な交点数とする。

Theorem 3 交点形式は非退化である。 x_j と x_{j+1} を結ぶパス I_j と $u(t)$ との組 $\gamma_j = I_j \otimes u(t)$ から得られる局所有限な 1 サイクルと x_k と x_{k+1} を結ぶパス I_k と $u^{-1}(t)$ との組 $\delta_k = I_k \otimes u^{-1}(t)$ から得られる局所有限な 1 サイクルとの交点数が

$$\langle \gamma_j, \delta_k \rangle = \begin{cases} \frac{-c_j}{1-c_j} & \text{if } k = j-1, \\ \frac{1-c_j c_{j+1}}{(1-c_j)(1-c_{j+1})} & \text{if } k = j, \\ \frac{-1}{1-c_{j+1}} & \text{if } k = j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるものがとれる、ここで $c_j = \exp(2\pi i \alpha_j)$ とする。

5 ねじれ周期関係式

Theorem 4 線型空間 $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$, $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_{-\omega})$, $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$, $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_{-\omega})$ 間に定めた pairing たちには整合性がある。これらの空間に対する基底 $\varphi_j, \psi_j, \gamma_j, \delta_j$ に対して 4 つの $(n+1)$ 次正方行列

$$\Pi_\omega = \langle \varphi_j, \gamma_k \rangle, \quad \Pi_{-\omega} = \langle \psi_j, \delta_k \rangle, \quad H_{ch} = \langle \varphi_j, \psi_k \rangle, \quad H_h = \langle \gamma_j, \delta_k \rangle$$

を定めるとねじれ周期関係式

$$\Pi_{\omega} {}^t H_h^{-1} {}^t \Pi_{-\omega} = H_{ch}, \quad i.e. \quad {}^t \Pi_{-\omega} H_{ch}^{-1} \Pi_{\omega} = {}^t H_h$$

をみたす。

$n = 0$ の場合には、ねじれ周期関係式はスカラーの関係式となり、ベータ関数の反転変式

$$B(p, q)B(-p, -q) = \frac{2\pi i(p+q)}{pq} \cdot \frac{1 - e^{2\pi i(p+q)}}{(1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q})}$$

を生み出す。 $n = 1$ の場合には、 $\Pi_{\pm\omega}$ は超幾何関数を成分とする 2×2 行列で

$$F(a, b, c; x)F(1-a, 1-b, 2-c; x) = F(a+1-c, b+1-c, 2-c; x)F(c-a, c-b, c; x)$$

等の超幾何関数間との関係式を生み出す。一般の n の場合には Appell-Lauricella 超幾何関数間との関係式を生み出す。

6 合流型交点理論

微分作用素 ∇_{ω} を定める \mathbb{P}^1 上の有理型 1 次微分形式 ω が高位の極をもった場合に合流型超幾何関数が現れる。その場合にも交点理論の展開は可能である。ねじれ周期関係式の簡単な例としてガンマ関数の反転変式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

や $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} dt\right) \left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{t^2/2} dt\right) = 2\pi i$ がある。また、Bessel 関数のパラメーター $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に関する Lommel の公式

$$J_a(z)J_{-a+1}(z) + J_{a-1}(z)J_{-a}(z) = \frac{2\sin(\pi a)}{\pi z},$$

を導くこともできる、ここで

$$J_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(a+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

であり、 $z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$ で $z/2$ の偏角は $-\pi/2$ から $\pi/2$ にとるものとする。

References

- [AK] K. Aomoto and M. Kita, *Hypergeometric functions (in Japanese)*, Springer-Verlag, Tokyo, 1994.
- [CM] K. Cho and K. Matsumoto, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relation I, Nagoya Math. J. **139** (1995), 67–86.
- [KM] M. Kita and K. Matsumoto, Duality for Hypergeometric Functions and Invariant Gauss-Manin Systems, *Compositio Math.*, **108** (1997), 77–106.
- [KY1] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles I, *Math. Nachr.* **166** (1994), 287–304.
- [KY2] M. Kita and M. Yoshida, *ibid.* II, *Math. Nachr.* **168**(1994), 171–190.
- [MMT] H. Majima, K. Matsumoto and N. Takayama, Intersection theory for confluent hypergeometric functions, *Tôhoku Math. J.*, **52**, (2000), 489–513.
- [Mat1] K. Matsumoto, Intersection numbers for logarithmic k -forms, *Osaka J. Math.*, **35** (1998), 873–893.
- [Mat2] K. Matsumoto, Intersection numbers for 1-forms associated with confluent hypergeometric functions, *Funkcial. Ekvac.*, **41** (1998), 291–308.
- [MY] K. Matsumoto and M. Yoshida, Recent progress of intersection theory for twisted (co)homology groups, *Advanced studies in Pure Mathematics* **27**, 2000, *Arrangements - Tokyo 1998*, 217–237.