超幾何関数の幾何学

―交点理論―

北大 理 松本 圭司

多変数関数論サマーセミナー
2005年8月1日

1. 序

超幾何関数 $F(a,b,c;z)$ は、変数 z に関するべき級数

$$F(a,b,c;z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}z^n$$

で定義される、a,b,c は複素パラメーターで $c\neq 0,-1,-2,\ldots$ とし、

$$(a)_n=a(a+1)\cdots(a+n-1)$$

とする。

パラメータ a, c が $\mathrm{Re}(a),\mathrm{Re}(c-a)>0$ をみたすとき、$F(a,b,c;z)$ は Euler 積分表示

$$F(a,b,c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)}\int_0^1 t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b}\frac{dt}{t(1-t)}$$

を持つ。

この積分表示は、ねじれコホモロジー群の代表元である logarithmic 1-form $d\log\frac{t}{1-t}$ とねじれホモロジー群の代表元である区間 $I=(0,1)$ とその端点で値が 0 となる関数 $u(t)=t^a(1-t)^{c-a}(1-zt)^{-b}$ との組 $I\otimes u(t)$ との pairing とみなすことができる。

ねじれ(コ)ホモロジー群たちには、交点形式という座標 t の取りかたに依存しない 幾何学的な pairing がある。これらの交点形式は具体的に値を求めることができ、pairing 間の整合性により超幾何関数間の関係式を生み出す。

この関係式の最も簡単な場合が、ベータ関数の反転交式

$$B(p,q)B(-p,-q)=\frac{2\pi i(p+q)}{pq}\frac{1-e^{2\pi i(p+q)}}{(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})}$$

である。

以下で超幾何関数に関する交点理論の解説を行う。

2．ねじれ Stokes 定理

超幾何関数 $F(a,b,c;z)$ の Euler 積分表示で現れる $\mathbb{C}-\{0,1,1/z\}$ 上の多価正則１次形式 $u(t)\varphi(t)$ の取り扱いの工夫から始める。

区間 I 上では多価関数 $u(t)$ の分枝は一意に定まることに注目する。話の本質をわかりやすくするために多価関数 $u(t)$ とその $\log$ 微分を

$$u(t)=\prod_{j=0}^{n+2}(t-x_j)^{\alpha_j},\qquad \omega=d\log(u(t))=\sum_{j=1}^{n+2}\frac{\alpha_j dt}{t-x_j}$$

とおいて少しだけ一般化しておく、ここで $x_0,x_1\ldots,x_n,x_{n+1},x_{n+2}$ は相異なる複素数で α_j は $\sum_{j=0}^{n+2}\alpha_j=0$ をみたす整数でない複素パラメーターとする。

集合 $Z=\mathbb{P}^1-\{x_0,\ldots,x_{n+2}\}$ 内の単連結な k 次チェイン D 上の k 次微分形式 ψ と多価関数 $u(t)$ との積の積分 $\int_D u(t)\psi$ を考える。その積分を多価関数 $u(t)$ と ψ と分離し ψ と D と $u(t)$ を組み合わせた $D\otimes u(t)$ との pairing $\langle\psi,D\otimes u(t)\rangle$ とみなす。

このルールのもとで Stokes 定理

$$\int_D d(u(t)\psi) = \int_{\partial D} u(t)\psi$$

がどうなるか調べる。

左辺は

$$d(u(t)\psi) = du(t) \wedge \psi + u(t)d\psi = u(t)(\omega \wedge \psi + d\psi)$$

となるので、$\langle \nabla_\omega \psi, D \otimes u(t) \rangle$ となる、ここで $\nabla_\omega = d + \omega\wedge$ は Z 上の１価正則 1-form ω により **ねじられた外微分作用素** とする。

一方、右辺は上記のルールに従い、$\langle \psi, (\partial D) \otimes u(t)|_{\partial D} \rangle$ である。そこで **ねじれ境界作用素** ∂_ω を $\partial_\omega(D \otimes u(t)) = (\partial D) \otimes u(t)|_{\partial D}$ として定める。

Theorem 1 (ねじれ Stokes 定理)

$$\langle \nabla_\omega \psi, D \otimes u(t) \rangle = \langle \psi, \partial_\omega(D \otimes u(t)) \rangle.$$

$\nabla_\omega \psi = 0$ をみたすk次微分形式 ψ を**ねじれ閉k次微分形式** といい、k次チェイン D_j とその上に指定された $u(t)$ の分枝との組の有限和$\gamma = \sum_{j\in J} D_j \otimes u(t)$ をねじれk次チェインといい、$\partial_\omega(\gamma) = 0$ をみたすものを **ねじれk次サイクル** という。

射影直線 $\mathbb{P}^1$ の座標を$x_0 = \infty$, $x_{n+1} = 0$, $x_{n+2} = 1$ になるように選ぶことができる。このように座標を選べば、$n = 1$ のときに超幾何関数 $F(a, b, c; z)$ の **Euler 積分表示** は、**ねじれ閉1次微分形式とねじれ1次サイクル上との pairing** とみなせる。

また、ねじれ微分作用素 ∇_ω を特徴付ける ω はx_j のみに留数 α_j の 1 位極をもつ$\mathbb{P}^1$ 上の有理型微分形式である。超幾何関数の **変数 z** はω **の $\mathbb{P}^1$ 内の極の配置** という形で **幾何学的** に設定される。また、ねじれ閉1次微分形式のねじれ1次サイクル上との pairing は基本的には線積分なので、**射影座標 t の選び方によらず定まっている**。

3．ねじれコホモロジーの交点形式

ねじれ Stokes 定理より、ねじれ閉1次微分形式と Z 内の有限和 $\gamma = \sum_{j=0}^{N} I_j \otimes u(t)$ で与えられるねじれ1サイクルとの pairing $\langle \varphi, \gamma \rangle$ に対して、φ に $\nabla_\omega f$ が加わっても pairing の値は変化しない、つまり

$$\langle \varphi + \nabla_\omega f, \gamma \rangle = \langle \varphi, \gamma \rangle$$

をみたす、ここで f は Z 上の C^∞ 関数とする。

そこで 1次ねじれコホモロジー群とcompact な台をもつ 1次ねじれコホモロジー群を

$$\begin{aligned} H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}^1 \to \mathcal{E}^2)/\nabla_\omega(\mathcal{E}^0), \\ H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega) &= \ker(\nabla_\omega : \mathcal{E}_c^1 \to \mathcal{E}_c^2)/\nabla_\omega(\mathcal{E}_c^0), \end{aligned}$$

で定義する、ここで $\mathcal{E}^k$ と $\mathcal{E}_c^k$ はそれぞれ Z 上のsmooth k-forms と Z 上のcompact な台をもつ smooth k-forms のなす 線型空間 とする。

パラメーター α_j が整数でない ので $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_\omega)$ から $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ への同型 $\imath_\omega$ が存在 し、ともに $(n+1)$ 次元 である。

compact な台をもつ 1次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega)$ と ω の符号を変えて得られる 1次コホモロジー群 $H^1(\mathcal{E}^\bullet, \nabla_{-\omega})$ に交点形式を

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_Z \varphi \wedge \psi$$

で定める。

Theorem 2 **交点形式は非退化** であり、

$$\varphi_j = d\log\frac{t-x_j}{t-x_{j+1}}, \qquad \psi_k = d\log\frac{t-x_k}{t-x_{k+1}}$$

に対して

$$\langle \varphi_j, \psi_k \rangle = 2\pi i \begin{cases} \frac{-1}{\alpha_j} & \text{if } k = j-1, \\ \frac{\alpha_j+\alpha_{j+1}}{\alpha_j\alpha_{j+1}} & \text{if } k = j, \\ \frac{-1}{\alpha_{j+1}} & \text{if } k = j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(証明) 同型 $\imath_\omega$ を追跡する。φ_j は x_j, x_{j+1} にのみ留数 $1, -1$ の１位極をもつ $\mathbb{P}^1$ 上の 1-form である。Z 上の smooth 関数 f で $\varphi_j - \nabla_\omega f$ が各 x_ℓ の小さな近傍 U_ℓ で恒等的に 0 になるものを構成する。

U_ℓ 内で $f_\ell = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (t - x_\ell)^n$ とおいて、微分方程式 $\nabla_\omega f_\ell = \varphi_j$ をみたす a_n を求めることができる。

$$\omega = \frac{\alpha_j}{t - x_\ell} + b_0 + b_1(t - x_\ell) + \cdots$$

より、f_ℓ は φ_j の極とならない x_ℓ では $a_0 = 0$ で、x_j, x_{j+1} では $a_0 = \frac{1}{\alpha_j}, \frac{-1}{\alpha_j}$ となる収束べき級数 になっている。

その収束域を $V_\ell (\supset U_\ell)$ とし、V_ℓ の補集合 V_ℓ^c 上では恒等的に 0 となり、U_ℓ 上では恒等的に 1 となる Z 上の smooth な関数を h_ℓ とする。各 f_ℓ は V_ℓ 上でしか定義されないが、

$$f = \sum_{\ell=0}^{n+2} h_\ell f_\ell$$

は Z 上の関数 とみなせ、$\varphi_j - \nabla_\omega f$ は U_ℓ で恒等的に 0 となる。

つまり、$\imath_\omega(\varphi_j)$ は $\varphi_j - \nabla_\omega f$ で代表される。

$$\langle\varphi_j,\varphi_k\rangle = \int_Z (\varphi_j - \nabla_\omega f)\wedge\varphi_k$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n+2}\int_{V_\ell - U_\ell}(\varphi_j - \nabla_\omega h_\ell f_\ell)\wedge\varphi_k = -\sum_{\ell=0}^{n+2}\int_{V_\ell - U_\ell}(\nabla_\omega h_\ell f_\ell)\wedge\varphi_k$$

$$= -\sum_{\ell=0}^{n+2}\int_{V_\ell - U_\ell} f_\ell dh_\ell\wedge\varphi_k = -\sum_{\ell=0}^{n+2}\int_{\partial(V_\ell - U_\ell)} h_\ell f_\ell\varphi_k$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n+2}\int_{\partial U_\ell} f_\ell\varphi_k = 2\pi i\sum_{\ell=0}^{n+2}\mathrm{Res}_{t=x_\ell}(f_\ell\varphi_k)$$

より定理が得られる。ここでは Stokes 定理 と 留数定理を用いている。h_ℓ は ∂V_ℓ では恒等的に 0, ∂U_ℓ では恒等的に 1 となっていることに注意する。 (証明終わり)

4．ねじれホモロジーの交点形式

ねじれ Stokes 定理より、compact な台をもつねじれ閉1次微分形式 φ とZ 内のねじれ 1次サイクル $\gamma = \sum_{j=0}^{N} I_j \otimes u(t)$ との pairing $\langle \varphi, \gamma \rangle$ に対して、γ に $\partial_\omega(G)$ が加わっても pairing の値は変化しない、つまり

$$\langle \varphi, \gamma + \partial_\omega(G) \rangle = \langle \varphi, \gamma \rangle,$$

をみたす、ここで $G = \sum_{j \in J} D_j \otimes u(t)$ はZ 上のねじれ 2チェイン。

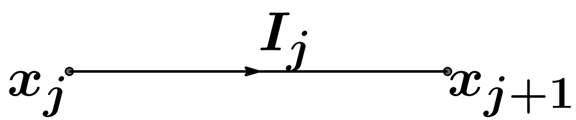
そこで 1次ねじれホモロジー群 と局所有限 1次ねじれコホモロジー群 を

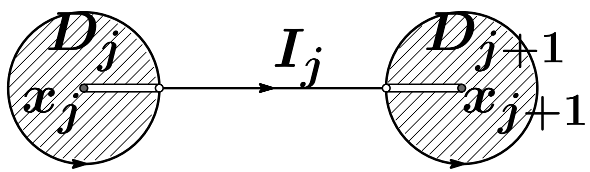
$$\begin{aligned} H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega) &= \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_0)/\partial_\omega(\mathcal{C}_2), \\ H_1(\mathcal{C}^{lf}_\bullet, \partial_\omega) &= \ker(\partial_\omega : \mathcal{C}^{lf}_1 \to \mathcal{C}^{lf}_0)/\partial_\omega(\mathcal{C}^{lf}_2), \end{aligned}$$

で定義する、ここで $\mathcal{C}_k$ と $\mathcal{C}^{lf}_k$ はそれぞれZ 上の有限和ねじれk次チェインたち と局所有限和ねじれk次チェインたち のなす 線型空間 とする。

パラメーター α_j が整数でない ので $H_1(\mathcal{C}_\bullet^{lf},\partial_\omega)$ から $H_1(\mathcal{C}_\bullet,\partial_\omega)$ への同型 $\jmath_\omega$ が存在 し、ともに $(n+1)$ 次元 である。

同型 $\jmath_\omega$ は以下の操作で得られる。区間 I_j と多価関数 $u(t)$ との組 $I_j \otimes u(t)$ は、区間 I_j の端点が Z にないため、Z 上の有限和ねじれ１次サイクルではなく、局所有限和ねじれ１次サイクル である。この１次サイクルに $\frac{-1}{1-c_j}\partial_\omega(D_j \otimes u(t))$ と $\frac{-1}{1-c_{j+1}^{-1}}\partial_\omega(D_{j+1} \otimes u(t))$ を加えると、$H_1(\mathcal{C}_\bullet,\partial_\omega)$ の元となる。ここで $c_j=\exp(2\pi i\alpha_j)$ とし、D_j,D_{j+1} 上の関数 $u(t)$ は、上方より I_j に近づけた場合に I_j 上で指定されている $u(t)$ に一致する。





1次ホモロジー群 $H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega)$ と ω の符号を変えて得られる局所有限1次ホモロジー群 $H_1(\mathcal{C}_\bullet^{lf}, \partial_{-\omega})$ 交点形式を

$$\langle \gamma, \delta \rangle = \sum_{p \in I_\mu \cap J_\nu} a_\mu b_\nu \langle I_\mu, J_\nu \rangle_p [u|_{I_\mu}(p)][u^{-1}|_{J_\nu}(p)]$$

で定める、ここで $\gamma = \sum_\mu a_\mu I_\mu \otimes u(t)$, $\delta = \sum_\nu b_\nu J_\nu \otimes u^{-1}(t)$,

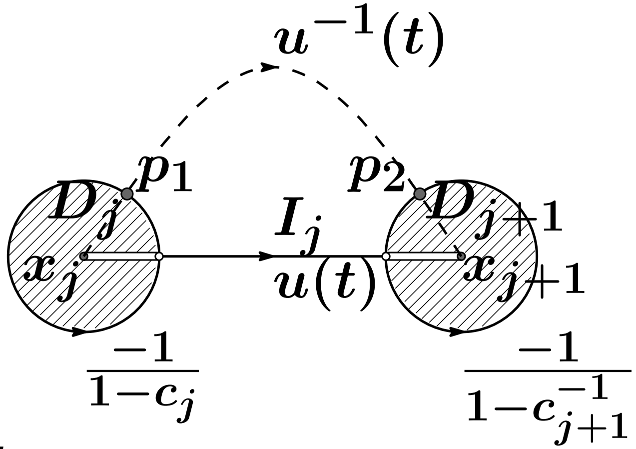
p は I_μ と J_ν の交点 で $\langle I_\mu, J_\nu \rangle_p$ は p における I_μ と J_ν の位相的な交点数 とする。

Theorem 3 **交点形式は非退化** である。x_j と x_{j+1} を結ぶパス I_j と $u(t)$ との組 $\gamma_j = I_j \otimes u(t)$ から得られる局所有限な 1 サイクルと x_k と x_{k+1} を結ぶパス I_k と $u^{-1}(t)$ との組 $\delta_k = I_k \otimes u^{-1}(t)$ から得られる局所有限な 1 サイクルとの交点数が

$$\langle \gamma_j, \delta_k \rangle = \begin{cases} \frac{-c_j}{1-c_j} & \text{if } k = j-1, \\ \frac{1-c_j c_{j+1}}{(1-c_j)(1-c_{j+1})} & \text{if } k = j, \\ \frac{-1}{1-c_{j+1}} & \text{if } k = j+1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

となるものがとれる。

(証明) 下記の図において p_1 での 位相的な交点数は -1 で $u(t)\times u^{-1}(t)=1$, p_2 での 位相的な交点数は $+1$ で $u(t)\times u^{-1}(t)=1$, なので、



２つのサイクルの交点数は

$$\frac{1}{1-c_j}-\frac{1}{1-c_{j+1}^{-1}}=\frac{1-c_jc_{j+1}}{(1-c_j)(1-c_{j+1})}.$$

他のサイクルの交点数も同様に計算できる。 (証明終わり)

5．ねじれ周期関係式

Theorem 4　4つの線型空間

$$H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_\omega),\ H^1(\mathcal{E}_c^\bullet, \nabla_{-\omega}),\ H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_\omega),\ H_1(\mathcal{C}_\bullet, \partial_{-\omega})$$

間に定めた pairing たちには整合性がある。

これらの空間に対する基底 φ_j, ψ_j, γ_j, δ_j に対して、4つの $(n+1)$ 次正方行列

$$\Pi_\omega = \langle \varphi_j, \gamma_k \rangle, \qquad \Pi_{-\omega} = \langle \psi_j, \delta_k \rangle,$$

$$H_{ch} = \langle \varphi_j, \psi_k \rangle, \qquad H_h = \langle \gamma_j, \delta_k \rangle,$$

を定めると ねじれ周期関係式

$$\Pi_\omega\, {}^tH_h^{-1}\, {}^t\Pi_{-\omega} = H_{ch}, \quad \text{i.e.} \quad {}^t\Pi_{-\omega} H_{ch}^{-1}\, \Pi_\omega = {}^tH_h$$

をみたす。

$n = 0$ の場合には、ねじれ周期関係式はスカラーの関係式となり、ベータ関数の反転交式

$$B(p,q)B(-p,-q) = \frac{2\pi i(p+q)}{pq} \cdot \frac{1-e^{2\pi i(p+q)}}{(1-e^{2\pi ip})(1-e^{2\pi iq})}$$

を生み出す。

$n = 1$ の場合には、$\Pi_{\pm\omega}$ は超幾何関数を成分とする 2×2 行列 で

$$\begin{aligned} & F(a,b,c;x)F(1-a,1-b,2-c;x) \\ = \ & F(a+1-c,b+1-c,2-c;x)F(c-a,c-b,c;x) \end{aligned}$$

等の超幾何関数間の関係式を生み出す。

一般の n の場合には Appell-Lauricella 超幾何関数 F_D 間の関係式を生み出す。

6．合流型交点理論

微分作用素 ∇_ω を定める $\mathbb{P}^1$ 上の有理型１次微分形式 ω が高位の極 をもった場合に 合流型超幾何関数 が現れる。その場合にも交点理論の展開は可能である。

ねじれ周期関係式の簡単な例として ガンマ関数の反転公式

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin \pi\alpha}$$

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}dt\right)\left(\int_{-i\infty}^{i\infty} e^{t^2/2}dt\right)=2\pi i$$

がある。

また、Bessel 関数のパラメーター $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ に関する Lommel の公式

$$J_a(z)J_{-a+1}(z) + J_{a-1}(z)J_{-a}(z) = \frac{2\sin(\pi a)}{\pi z},$$

を導くこともできる、ここで

$$J_a(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(a+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^k,$$

であり、$z \in \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$ で $z/2$ の偏角は $-\pi/2$ から $\pi/2$ でとるものとする。

References

[AK] K. Aomoto and M. Kita, Hypergeometric functions (in Japanese), Springer-Verlag, Tokyo, 1994.

[CM] K. Cho and K. Matsumoto, Intersection theory for twisted cohomologies and twisted Riemann's period relation I, Nagoya Math. J. 139 (1995), 67–86.

[KM] M. Kita and K. Matsumoto, Duality for Hypergeometric Functions and Invariant Gauss-Manin Systems, Compositio Math., 108 (1997), 77–106.

[KY1] M. Kita and M. Yoshida, Intersection theory for twisted cycles I, Math. Nachr. 166 (1994), 287–304.

[KY2] M. Kita and M. Yoshida, ibid. II, Math. Nachr. 168(1994), 171–190.

[MMT] H. Majima, K. Matsumoto and N. Takayama, Intersection theory for confluent hypergeometric functions, Tohoku J. Math. , 52, (2000), 489–513.

[M1] K. Matsumoto, Intersection numbers for logarithmic k-forms, Osaka J. Math., 35 (1998), 873–893.

[M2] **K.Matsumoto, Intersection numbers for** 1**-forms associated with confluent hypergeometric functions, Funkcial. Ekvac., 41 (1998), 291–308.**

[MY] **K. Matsumoto and M. Yoshida, Recent progress of intersection theory for twisted (co)homology groups, Advanced studies in Pure Mathematics 27, 2000,** *Arrangements - Tokyo 1998*, **217–237.**