

# 双曲絡み目保型関数の試作品

松本 圭司（北大 理）

秋季総合分科会 無限可積分系特別講演

岡山大学 2005年9月20日

# 1. 序

Gauss の超幾何微分方程式  $E(\alpha, \beta, \gamma)$

$$x(1-x)\frac{d^2f}{dx^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}\frac{df}{dx} - \alpha\beta f = 0$$

は、 $(\alpha, \beta, \gamma)$  をパラメーター とする  $x = 0, 1, \infty$  に確定特異点をもつ 2 階線型微分方程式 である。

パラメータ  $(\alpha, \beta, \gamma)$  が特別なとき、2 つの線型独立な解  $u_1(x), u_2(x)$  の比から得られる写像

$$s : \mathbb{C} - \{0, 1\} \ni x \mapsto u_1(x)/u_2(x) \in \mathbb{P}^1$$

が  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  と商空間  $\mathbb{H}/M$  との同型を引き起こす ことがある、ここで  $\mathbb{H}$  は上半空間 で  $M$  は解  $u_1(x), u_2(x)$  に関するモノドロミー群 とする。

例えば  $(\alpha, \beta, \gamma) = (1/2, 1/2, 1)$  のとき、モノドロミー群  $M$  は  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  の基本群と同型で、うまく基本解を選べば  $SL_2(\mathbb{Z})$  のレベル2の主合同部分群

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a-1, b, c, d-1 \text{ は偶数} \right\}$$

(厳密には射影化したもの)となる。そして写像  $s$  は  $\mathbb{C} - \{0, 1\}$  と  $\mathbb{H}/M$  との同型を与える。

写像  $s$  は射影直線の4点で分岐する2重被覆で得られる楕円曲線族に関する周期写像とみなすこともできる。

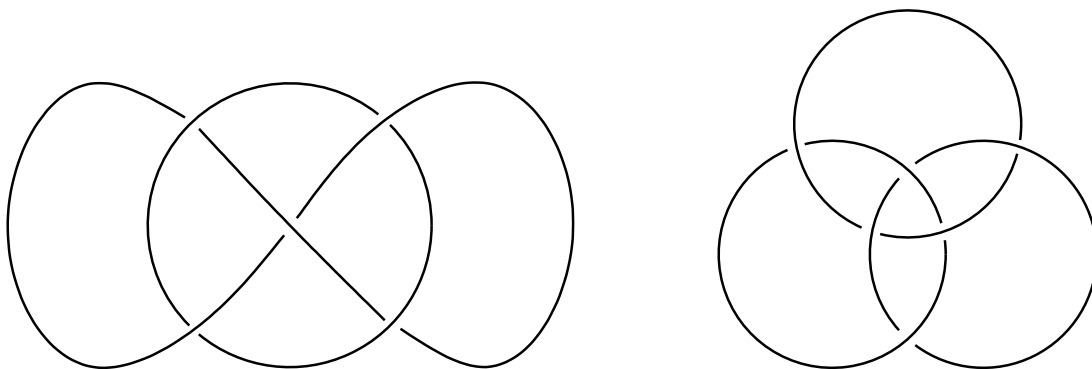
この写像  $s$  の逆写像は  $\lambda$ -関数と呼ばれる  $M$  の作用で不変な上半空間  $\mathbb{H}$  上の保型関数であり、theta constants

$$\vartheta_{a,b}(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp[\pi i \{ (n+a)^2 \tau + 2(n+a)b \}], \quad (\tau \in \mathbb{H}, a, b \in \mathbb{Q})$$

によって  $\lambda(\tau) = \frac{\vartheta_{0,1/2}^4(\tau)}{\vartheta_{0,0}^4(\tau)}$  と表示される。

この対応の一般化がいろいろ研究されているが、超幾何微分方程式の多変数化、楕円曲線族の高次元化、等によるものが主であった。

ここでは 双曲構造を許す絡み目 (the Whitehead link  $L_W$ , the Borromean rings  $L_B$ ) の補空間 に注目して、



the Whitehead link and the Borromean rings

今までとは 少し異なる視点から上記対応の一般化 を試みる。

これらの絡み目  $L$  の補空間  $S^3 - L$  に対して、実 3 次元上半空間  $\mathbb{H}^3$  に作用する  $SL_2(\mathbb{Z}[i])$  の離散群  $G$  と同相写像

$$\varphi : \mathbb{H}^3 / G \xrightarrow{\cong} S^3 - L$$

が存在することが知られている。

群  $G$  は  $S^3 - L$  の基本群と同型 であり、状況は  $\lambda$ -関数

$$\lambda : \mathbb{H} / M \xrightarrow{\cong} \mathbb{C} - \{0, 1\}$$

と酷似している。

しかし、今までにその同相写像  $\varphi$  を具体的に表示しようという試みがなかった。そこで the Whitehead link  $L_W$  や the Borromean rings  $L_B$  に対して、離散群  $G$  の作用に関して不変となる  $\mathbb{H}^3$  上の実解析的関数を  $I_{2,2}$  型対称領域上のテータ関数を用いて構成する。そして得られた保型関数を用いて 同相写像  $\varphi$  を具体的に与える。

この一連の作業により、以下のような成果が得られる。

- 絡み目補空間  $S^3 - L$  は実代数的集合の一部分 (いくつかの不等式が必要) として表現 できる。
- 絡み目を構成する  $S^1$  を cusp の blow up として代数的に把握 できる。
- 構成した保型関数たちにより、生成元で与えられる 群  $G$  の数論的な特徴づけ が得られる。
- 絡み目補空間の 対称性 を構成した保型関数に作用する群の作用として 翻訳 できる。

## 2. 絡み目補空間の双曲構造

実3次元双曲空間  $\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\}$  の等長変換群は

$$GL_2^T(\mathbb{C}) = \{\langle GL_2(\mathbb{C}), T \rangle \mid T^2 = id, T \cdot g = \bar{g} \cdot T\}$$

である。

ここで、鏡映  $T$  と  $g = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$  に対し、それらの  $(z, t) \in \mathbb{H}^3$  へ作用  $T \cdot (z, t)$ ,  $g \cdot (z, t)$  は

$$(\bar{z}, t),$$

$$\left( \frac{g_{11}\bar{g}_{21}t^2 + (g_{11}z + g_{12})\overline{(g_{21}z + g_{22})}}{|g_{21}|^2t^2 + (g_{21}z + g_{22})\overline{(g_{21}z + g_{22})}}, \frac{|\det(g)|t}{|g_{21}|^2t^2 + (g_{21}z + g_{22})\overline{(g_{21}z + g_{22})}} \right),$$

とする。

$GL_2(\mathbb{C})$  の部分群  $G$  に対して、 $G$  と  $T$  で生成される  $GL_2^T(\mathbb{C})$  の部分群を  $G^T$  で表すことにする。

the Whitehead link  $L_W$  や the Borromean rings  $L_B$  に対して、  
それらの補空間には双曲構造が入る ことが知られている。

つまり、同相写像

$$\varphi_W : \mathbb{H}^3 / G_W \xrightarrow{\cong} S^3 - L_W, \quad \varphi_B : \mathbb{H}^3 / G_B \xrightarrow{\cong} S^3 - L_B$$

が存在する。

ここで  $S^3$  は 3次元球面、 $GL_2(\mathbb{C})$  の離散群  $G_W$  と  $G_B$  は以下のような元たちとスカラー行列  $iI_2$  で生成される  $\Gamma = GL_2(\mathbb{Z}[i])$  の部分群 である。

$$G_W = \langle w_1, w_2 \rangle,$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+i & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_B = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle,$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 2+i & 2i \\ -1 & -i \end{pmatrix}.$$

Remark 1 超幾何微分方程式  $E(\alpha, \beta, \gamma)$  のパラメーターが

$$\cos(2\pi\alpha) = \frac{1+i}{2}, \quad \beta = -\alpha, \quad \gamma \in \mathbb{Z}$$

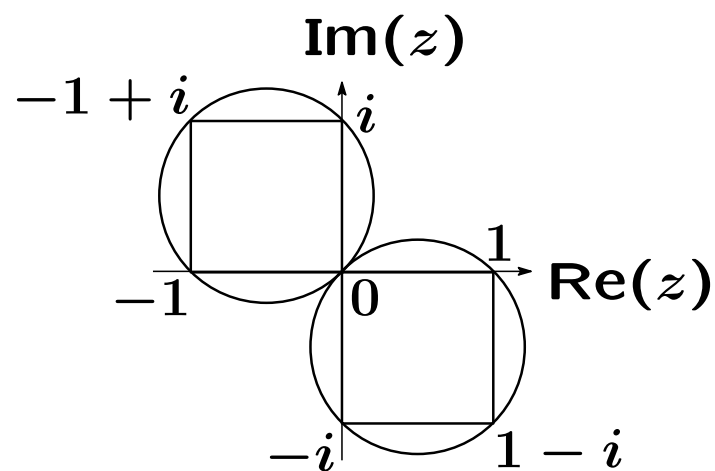
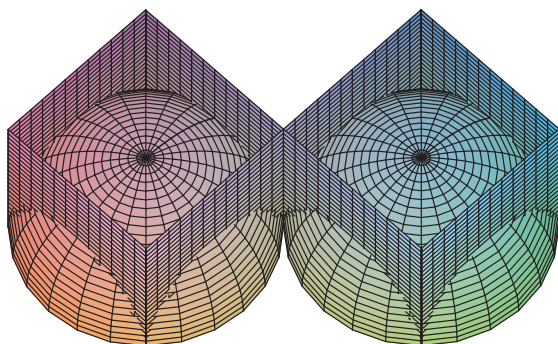
をみたすものの モノドロミー群として  $G_W$  は現れる。

超幾何関数  $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$  のパラメーターが

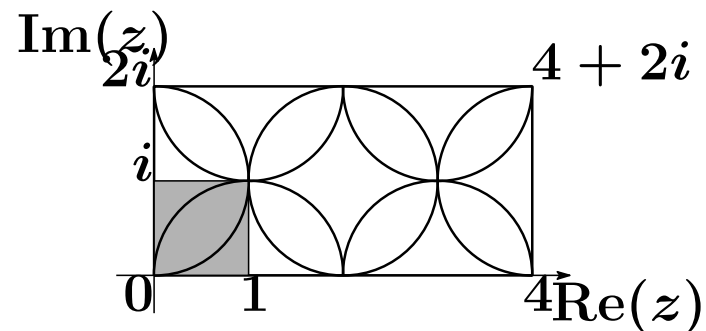
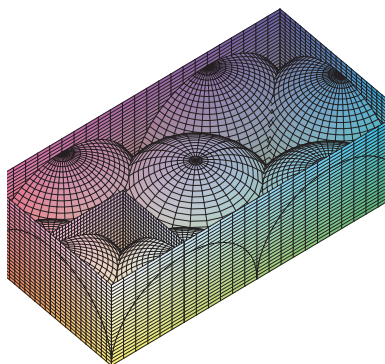
$$e^{2\pi i(\alpha+2/3)} = i\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \quad e^{2\pi i(\beta+2/3)} = i\frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}, \quad \gamma = \frac{2}{3}$$

をみたすものに対して、 $F(\alpha, \beta, \gamma; x^3)$  のみたす微分方程式のモノドロミー群として  $G_B$  は現れる。

商空間  $\mathbb{H}^3/G_W$ ,  $\mathbb{H}^3/G_B$  の **基本領域** は以下の Figures のようにとることができる。



Fundamental domain of  $G_W$  in  $\mathbb{H}^3$



Fundamental domain of  $G_B$  in  $\mathbb{H}^3$

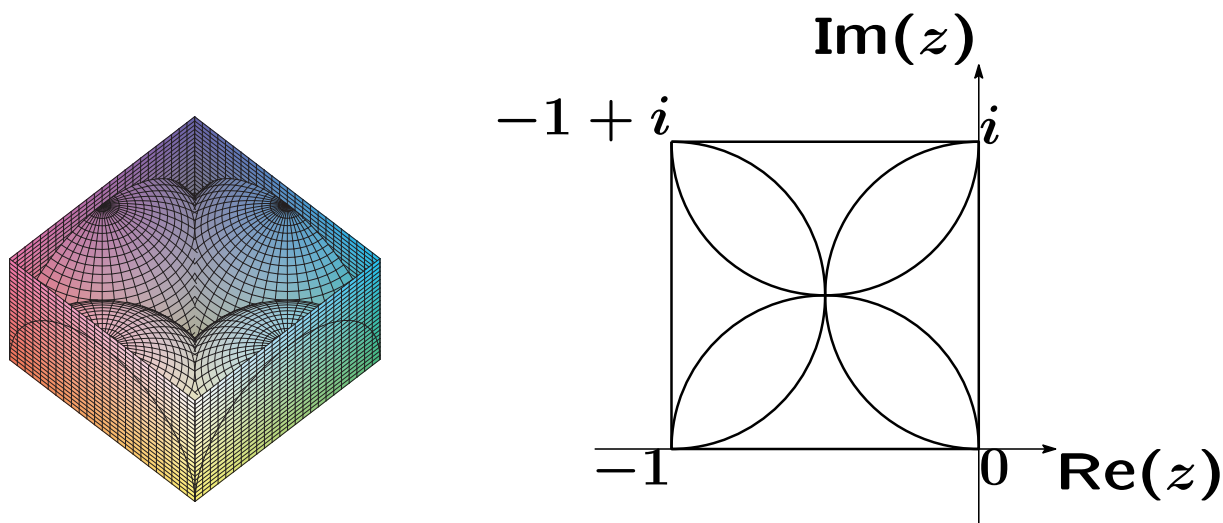
商空間  $\mathbb{H}^3/G_W$  には **2つの cusps** があり、商空間  $\mathbb{H}^3/G_B$  には **3つの cusps** がある。

3つの  $\Gamma$  の合同部分群を以下のように定める。

$$\begin{aligned} S\Gamma_0(1+i) &= \{(g_{jk}) \in \Gamma \mid \det(g) = \pm 1, \quad g_{21} \in (1+i)\mathbb{Z}[i]\}, \\ \Gamma_1(2) &= \{g = (g_{jk}) \in \Gamma \mid g_{12}, g_{11} - g_{22} \in 2\mathbb{Z}[i]\}, \\ \Gamma(2) &= \{g = (g_{jk}) \in \Gamma \mid g_{12}, g_{21}, g_{11} - g_{22} \in 2\mathbb{Z}[i]\}. \end{aligned}$$

$\Gamma^T(2)$  は  $\mathbb{H}^3$  内の正8面体の各面を鏡映面とする鏡映群である。

その Weyl chamber は以下のようにになっている。



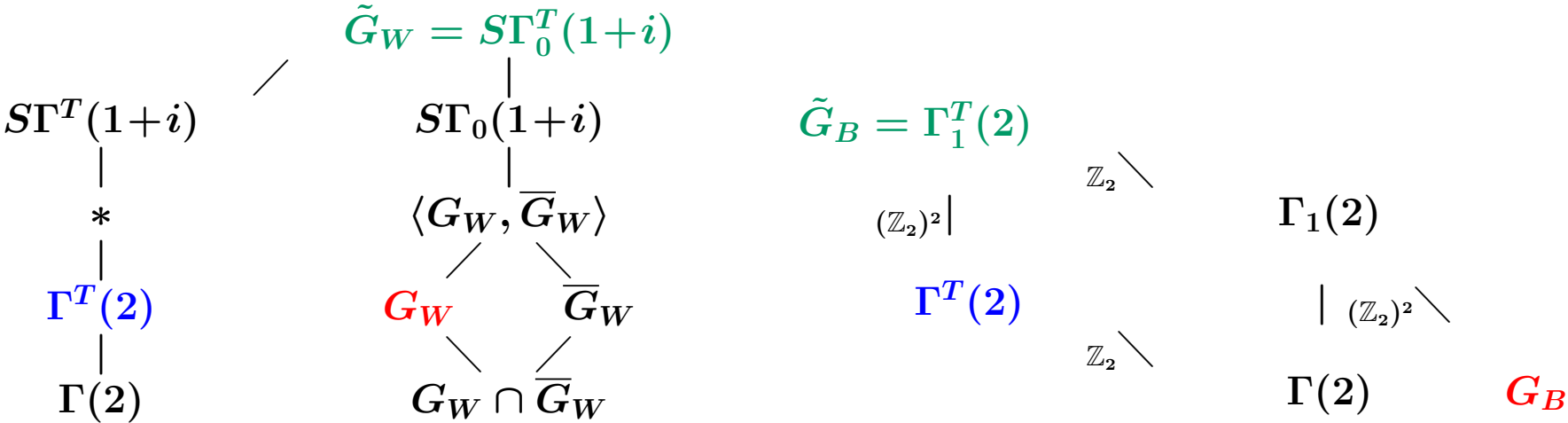
Weyl chamber of  $\Gamma^T(2)$

$\langle \Gamma^T(2), G_W \rangle = \tilde{G}_W$ 、 $\langle \Gamma^T(2), G_B \rangle = \tilde{G}_B$  とする。

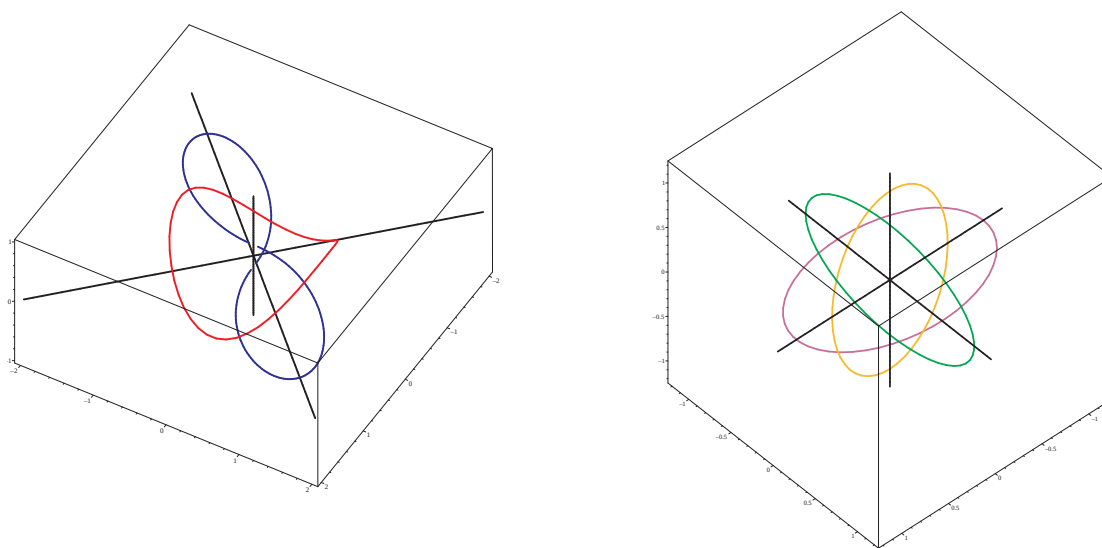
Lemma 1 (1)  $\tilde{G}_W = S\Gamma_0^T(1+i)$ ,  $\tilde{G}_B = \Gamma_1^T(2)$ .

(2)  $\tilde{G}_W/\Gamma^T(2)$  は 位数 8 の 2 面体群 と同型、 $\tilde{G}_B/\Gamma^T(2)$  は  $(\mathbb{Z}_2)^2$  と同型。

(3)  $S\Gamma_0(1+i)/G_W$  は  $(\mathbb{Z}_2)^2$  と同型、 $\tilde{G}_B/G_B$  は  $(\mathbb{Z}_2)^3$  と同型。



Remark 2 Lemma 1 (3) で現れた群  $(\mathbb{Z}_2)^2$ ,  $(\mathbb{Z}_2)^3$  は  $L_W$ ,  $L_B$  がもつ対称性に対応している。 $L_W$ ,  $L_B$  を Figure のように配置すると、左図においては座標軸を中心とする  $180^\circ$  回転 たちは  $L_W$  を保ち、群  $(\mathbb{Z}_2)^2$  を生成し、右図においては座標平面に関する鏡映 たちは  $L_B$  を保ち、群  $(\mathbb{Z}_2)^3$  を生成する。



Symmetries of  $L_W$  and  $L_B$

### 3. $I_{2,2}$ 型対称領域 $\mathbb{D}$ 上のテータ関数

$I_{2,2}$ 型対称領域  $\mathbb{D} = \{\tau \in M_{2,2}(\mathbb{C}) \mid (\tau - \tau^*)/2i \text{ は正定値} \}$  上のテータ関数  $\Theta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  は、級数

$$\Theta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)(\tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}[i]^2} \exp[\pi i \{(n + a)\tau(n + a)^* + 2\operatorname{Re}(nb^*)\}]$$

で定義される、ここで  $\tau \in \mathbb{D}$ ,  $a, b \in \mathbb{Q}[i]^2$  とする。

$\Theta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)(\tau)$  の  $a, b$  に  $\mathbb{Z}[i]^2$  の元  $m, n$  が加わる と

$$\Theta\left(\begin{smallmatrix} a + m \\ b + n \end{smallmatrix}\right)(\tau) = \exp[-2\pi i \operatorname{Re}(mb^*)] \Theta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)(\tau)$$

となることが、定義より容易に導ける。

**Theorem 1** テータ関数  $\Theta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$  は、以下の2次関係式をみたす。

$$\begin{aligned}
 & 4\Theta\left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)(\tau)^2 \\
 = & \sum_{e, f \in \frac{1+i}{2}\mathbb{Z}[i]^2 / \mathbb{Z}[i]^2} \exp[2\pi i \operatorname{Re}((1+i)be^*)] \\
 & \times \Theta\left(\begin{smallmatrix} e + (1+i)a \\ f + (1+i)b \end{smallmatrix}\right)(\tau) \Theta\left(\begin{smallmatrix} e \\ f \end{smallmatrix}\right)(\tau).
 \end{aligned}$$

## 4. $\Gamma^T(2)$ に関する保型関数

実3次元上半空間  $\mathbb{H}^3$  は  $I_{2,2}$  型対称領域  $\mathbb{D}$  に

$$j : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \frac{i}{t} \begin{pmatrix} t^2 + |z|^2 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{D}$$

により埋めこむことができる。

この埋めこみにより  $T$  と  $GL_2(\mathbb{C})$  は  $j(\mathbb{H}^3)(\subset \mathbb{D})$  に

$$j(T \cdot (z, t)) = {}^t j(z, t), \quad j(g \cdot (z, t)) = \frac{1}{|\det(g)|} g \cdot j(z, t) \cdot g^*$$

で作用する。

埋めこみ  $j : \mathbb{H}^3 \rightarrow \mathbb{D}$  による  $\Theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(\tau)$  の引き戻し を  $\Theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(z, t)$  で表す。

$a, b \in (\frac{\mathbb{Z}[i]}{2})^2$  に対して、略記号

$$\Theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(z, t) = \Theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix}(z, t) = \Theta \begin{bmatrix} 2a \\ 2b \end{bmatrix}$$

を用いる。

**Proposition 1**  $\Theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(z, t)$  は  $T$  および  $g \in \Gamma$  の作用で以下のように変化する。

$$\begin{aligned} \Theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(T \cdot (z, t)) &= \Theta \begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{pmatrix}(z, t), \\ \Theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}(g \cdot (z, t)) &= \Theta \begin{pmatrix} ag \\ b(g^*)^{-1} \end{pmatrix}(z, t). \end{aligned}$$

## Theorem 2 4つのテータ関数

$$\begin{aligned}x_0 &= \Theta \begin{bmatrix} 0, 0 \\ 0, 0 \end{bmatrix}, & x_1 &= \Theta \begin{bmatrix} 1+i, 1+i \\ 1+i, 1+i \end{bmatrix}, \\x_2 &= \Theta \begin{bmatrix} 1+i, 0 \\ 0, 1+i \end{bmatrix}, & x_3 &= \Theta \begin{bmatrix} 0, 1+i \\ 1+i, 0 \end{bmatrix},\end{aligned}$$

は、 $\Gamma^T(2)$  の作用で不変な実数値関数 である。さらに  $x_0$  は  $\Gamma^T$  の作用で不変な正値関数 である。

写像

$$\theta : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \frac{1}{x_0}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

は、 $\mathbb{H}^3/\Gamma^T(2)$  と 正八面体

$$\{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid |t_1| + |t_2| + |t_3| \leq 1\}$$

から 6 つの頂点  $(\pm 1, 0, 0)$ ,  $(0, \pm 1, 0)$ ,  $(0, 0, \pm 1)$  を除いた集合との同型を与える。

## 5. $\tilde{G}_W, \tilde{G}_B$ に関する保型関数

群  $G_W, G_B$  の生成元たちの  $x_1, x_2, x_3$  への作用は、以下のようになる。

Lemma 2

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot w_1 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot w_2 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix},$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot b_1 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix},$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot b_2 = (x_1, x_2, x_3),$$

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot b_3 = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} & & -1 \\ & 1 & \\ -1 & & \end{pmatrix}.$$

上記の作用により、 $\tilde{G}_W$  の表現として位数 8 の 2 面体群が現れ、 $\tilde{G}_B$  の表現として  $(\mathbb{Z}_2)^2$  が現れている。

Theorem 3 (1) 関数  $x_1^2 + x_2^2$ ,  $x_1^2 x_2^2$ ,  $x_3^2$ ,  $x_1 x_2 x_3$  は  $\tilde{G}_L$  の作用で  
不変 である。写像

$$\tilde{\varphi}_W : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \left( \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_0^2}, \frac{x_1^2 x_2^2}{x_0^4}, \frac{x_3^2}{x_0^2}, \frac{x_1 x_2 x_3}{x_0^3} \right) \in \mathbb{R}^4$$

は、 $\mathbb{H}^3 / \tilde{G}_W$  を  $\mathbb{R}^4$  内の代数多様体  $t_2 t_3 = t_4^2$  内に埋めこむ。

(2) 関数  $x_2$ ,  $x_1 x_3$ ,  $x_1^2 + x_3^2$  は  $\tilde{G}_B$  の作用で不変 である。写像

$$\tilde{\varphi}_B : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \frac{1}{x_0^2} (x_0 x_2, x_1 x_3, x_1^2 + x_3^2) \in \mathbb{R}^3$$

は、 $\mathbb{H}^3 / \tilde{G}_B$  を  $\mathbb{R}^3$  内に埋めこむ。

## 6. $G_W$ , $G_B$ に関する保型関数

実数値関数

$$\begin{aligned} y_1 &= \Theta \begin{bmatrix} 0, 1 \\ 1, 0 \end{bmatrix}, & y_2 &= \Theta \begin{bmatrix} 1+i, 1 \\ 1, 1+i \end{bmatrix}, \\ y_3 &= \Theta \begin{bmatrix} 0, i \\ 1, 0 \end{bmatrix}, & y_4 &= \Theta \begin{bmatrix} 1+i, i \\ 1, 1+i \end{bmatrix}, \\ z_1 &= \Theta \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}, & z_2 &= \Theta \begin{bmatrix} i, 0 \\ 0, 1 \end{bmatrix}, \\ z_3 &= \Theta \begin{bmatrix} 1, 1+i \\ 1+i, 1 \end{bmatrix}, & z_4 &= \Theta \begin{bmatrix} i, 1+i \\ 1+i, 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

を用いて  $G_W$  および  $G_B$  の作用で不変な関数が構成できる。

Proposition 2 (1) 以下の  $\omega_{jk}$  は  $G_W$  の作用で不変な関数である。

$$\omega_{01} = (x_2^2 - x_1^2)y_1y_2y_3y_4,$$

$$\omega_{11} = x_3y_1y_2,$$

$$\omega_{12} = x_1x_2y_1y_2,$$

$$\omega_{13} = x_3(x_2^2 - x_1^2)y_3y_4,$$

$$\omega_{14} = x_1x_2(x_2^2 - x_1^2)y_3y_4,$$

$$\omega_{21} = y_1y_2\{(x_2 - x_1)y_1y_3 + (x_2 + x_1)y_2y_4\},$$

$$\omega_{22} = (x_2^2 - x_1^2)\{(x_2 - x_1)y_1y_4 + (x_2 + x_1)y_2y_3\},$$

$$\omega_{31} = (x_2 - x_1)y_1y_3 - (x_2 + x_1)y_2y_4,$$

$$\omega_{32} = y_3y_4\{-(x_2 - x_1)y_1y_4 + (x_2 + x_1)y_2y_3\}.$$

(2) 以下の  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  は  $G_B$  の作用で不変な関数である。

$$\beta_1 = z_2z_4, \quad \beta_2 = (x_1 + x_3)z_1, \quad \beta_3 = (x_1 - x_3)z_3.$$

Theorem 1 より、 $y_1, \dots, y_4, z_1, \dots, z_4$  の2乗は  $x_0, \dots, x_3$  で以下のように表示できる。

Lemma 3

$$4y_1^2 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 - x_2 + x_3),$$

$$4y_2^2 = (x_0 + x_1 - x_2 - x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3),$$

$$4y_3^2 = (x_0 + x_1 - x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 + x_3),$$

$$4y_4^2 = (x_0 + x_1 + x_2 - x_3)(x_0 - x_1 - x_2 - x_3),$$

$$4z_1^2 = (x_0 + x_1 + x_2 + x_3)(x_0 - x_1 + x_2 - x_3),$$

$$4z_2^2 = (x_0 + x_1 + x_2 - x_3)(x_0 - x_1 + x_2 + x_3),$$

$$4z_3^2 = (x_0 + x_1 - x_2 - x_3)(x_0 - x_1 - x_2 + x_3),$$

$$4z_4^2 = (x_0 + x_1 - x_2 + x_3)(x_0 - x_1 - x_2 - x_3).$$

## 7. 商空間 $\mathbb{H}^3/G_W$ , $\mathbb{H}^3/G_B$ の埋めこみ

Theorem 4 写像

$$\varphi_W : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto (\tilde{\varphi}_W; \varpi_{01}; \varpi_1; \varpi_2, \varpi_3) \in \mathbb{R}^{13}$$

は  $\mathbb{H}^3/G_W$  の  $\mathbb{R}^{13}$  への埋め込みを与える、ここで

$$\begin{aligned}\varpi_1 &= (\varpi_{11}, \varpi_{12}, \varpi_{13}, \varpi_{14}), \\ \varpi_2 &= (\varpi_{21}, \varpi_{22}), \\ \varpi_3 &= (\varpi_{31}, \varpi_{32}), \\ \varpi_{jk} &= \omega_{jk}/x_0^{\deg \omega_{jk}},\end{aligned}$$

とする。

$\varphi_W$  の像を含む実 3 次元代数的集合は具体的に記述されている。

## Theorem 5 写像

$$\varphi_B : \mathbb{H}^3 \ni (z, t) \mapsto \frac{1}{x_0^2}(x_0x_2, x_1x_3, x_1^2 + x_3^2, \beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^6$$

は  $\mathbb{H}^3/G_B$  の  $\mathbb{R}^6$  への埋め込み を与える。

その像は以下の関係式で定まる 代数的集合に含まれる 。

$$\begin{aligned} 16\beta_1^2 &= (x_0^2 - x_2^2)^2 - 2(x_0^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2) + (x_1^2 + x_3^2)^2 \\ &\quad - 4(x_1x_3)^2 - 8(x_0x_2)(x_1x_3), \\ 4\beta_2^2 &= (x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_3)((x_0 + x_2)^2 - (x_1^2 + x_3^2) - 2x_1x_3), \\ 4\beta_3^2 &= (x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_3)((x_0 - x_2)^2 - (x_1^2 + x_3^2) + 2x_1x_3). \end{aligned}$$

## 8. 群 $G_W, G_B$ の数論的特徴づけ

Theorem 6  $ST_0(1+i)$  の元  $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  で  $\text{Re}(s) \equiv 1 \pmod{2}$  をみたすものが  $G_W$  に属するための必要十分条件 は、2 を法とした以下の合同式をみたすことである。

$$\begin{aligned} & \frac{\text{Re}(p) + \text{Im}(s) - (-1)^{\text{Re}(q)+\text{Im}(q)}(\text{Im}(p) + \text{Re}(s))}{2} \\ \equiv & \frac{((-1)^{\text{Re}(r)} + 1)\text{Im}(q) + (\text{Re}(q) + \text{Im}(q))(\text{Re}(r) + \text{Im}(r))}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{Re}(p + q) + \frac{\text{Re}(r) - (-1)^{\text{Re}(q)+\text{Im}(q)}\text{Im}(r)}{2} \equiv 1.$$

**Theorem 7**  $\Gamma_1(2)$  の元  $I_2 + \begin{pmatrix} 2p & 2q \\ r & 2s \end{pmatrix}$  が  $G_B$  に属するための必要十分条件 は、2 を法とした以下の合同式をみたすことである。

$$\operatorname{Re}(q) + \operatorname{Im}(r) \equiv 0,$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Re}(p + s) + \operatorname{Im}(p + s) \\ \equiv & \frac{1 + (-1)^{\operatorname{Re}(r) + \operatorname{Im}(r)}}{2} \operatorname{Re}(q) + \frac{1 - (-1)^{\operatorname{Re}(r) + \operatorname{Im}(r)}}{2} \operatorname{Im}(q). \end{aligned}$$

# References

- [1 ] E. Freitag, Modulformen zweiten Grades zum rationalen und Gaußschen Zahlkörper, Sitzungsber. Heidelb. Akad. Wiss., 1 (1967), 1–49.
  
- [2 ] K. Matsumoto, T. Sasaki and M. Yoshida, The monodromy of the period map of a 4-parameter family of K3 surfaces and the Aomoto-Gel'fand hypergeometric function of type (3,6), Internat. J. of Math., 3 (1992), 1–164.
  
- [3 ] K. Matsumoto, Theta functions on the bounded symmetric domain of type  $I_{2,2}$  and the period map of 4-parameter family of K3 surfaces, Math. Ann., 295 (1993), 383–408.

- [4 ] K. Matsumoto, Algebraic relations among theta functions on the bounded symmetric domain of type  $I_{r,r}$ , to appear in Kyushu J. Math.
  
- [5 ] K. Matsumoto, Automorphic functions for the Borromean-rings-complement group, preprint 2005.
  
- [6 ] K. Matsumoto, H. Nishi and M. Yoshida, Automorphic functions for the Whitehead-link-complement group, preprint 2005.
  
- [7 ] K. Matsumoto and M. Yoshida, Invariants for some real hyperbolic groups, Internat. J. of Math., 13 (2002), 415–443.

- [8 ] W. Thurston, Geometry and Topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton Univ., 1977/78.
  
- [9 ] N. Wielenberg, The structure of certain subgroups of the Picard group, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 84 (1978), no. 3, 427–436.
  
- [10 ] M. Yoshida, Hypergeometric Functions, My Love, Aspects of Mathematics, E32, Friedr Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1997.