

円周率 π について



松本 圭司 (Keiji Matsumoto)

January 31, 2020

1. π の無理性

Theorem 1 円周率 π は無理数である.

1761年に J.H. Lambert がこの定理を証明したと岩波の数学辞典 **[NM]** には記載されている. 文献 **[PLM]** には, その証明には誤りがあり, 1794年に A.M. Legendré によるものが最初であると記載されている. Legendré は π^2 が無理数であることも合わせて証明している. 1882年に F. Lindemann が π はいかなる整数係数の代数方程式の根となりえないこと, つまり π が超越数であることを **[L]** で証明している.

ここでは 1946年に I. Niven により発表されたこの定理の証明 **[N]** を紹介する. ここで紹介した事柄についての原論文は, 文献 **[BBB]** にすべて収録されている.

まず, Lemma をひとつ用意する.

Lemma 1 整数係数の多項式 $g(x)$ の j 次導関数 $g^{(j)}(x)$ の全ての係数は, $j!$ で割り切れる.

Proof. $g(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($a_k \in \mathbb{Z}$) とする. $n < j$ ならば $g^{(j)}(x) = 0$ であり, この場合は x のすべての係数が 0 とみなし, 主張が成立する.

$n \geq j$ の場合,

$$g^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^n k \cdot (k-1) \cdots (k-j+1) a_k x^{k-j} = \sum_{k=j}^n \frac{k! a_k}{(k-j)!} x^{k-j}$$

である. この多項式を $j!$ で割ると,

$$\frac{g^{(j)}(x)}{j!} = \sum_{k=j}^n \frac{k! a_k}{(k-j)! j!} x^{k-j} = \sum_{k=j}^n a_k \cdot k C_j x^{k-j}$$

であり, すべての係数は整数となる. □

Niven's Proof. π が $\frac{a}{b}$ ($b > 0$, 既約分数) と仮定して, 矛盾を導く.
自然数 n に対して, $2n$ 次多項式 $f(x)$ を以下のように定める:

$$(1) \quad f(x) = \frac{b^n}{n!} x^n (\pi - x)^n.$$

$f(x)$ と $\sin x$ は閉区間 $[0, \pi]$ で 0 以上の連続関数なので,

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx > 0$$

である. 関数 x^n と $(\pi - x)^n$ の閉区間 $[0, \pi]$ 上での最大値はともに π^n なので,

$$0 \leq f(x) \sin x \leq f(x) \leq \frac{b^n}{n!} \pi^n \pi^n = \frac{(\pi^2 b)^n}{n!}, \quad x \in [0, \pi].$$

したがって,

$$\int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \pi \cdot \frac{(\pi^2 b)^n}{n!}.$$

任意の正数 c に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0$$

なので, $c = \pi^2 b$ に対して, 自然数 n を

$$\frac{(\pi^2 b)^n}{n!} < \frac{1}{\pi}$$

となるように選ぶことができる.

この不等式をみたす十分大きな自然数 n に対しては

$$(2) \quad 0 < \int_0^\pi f(x) \sin x dx \leq \pi \cdot \frac{(\pi^2 b)^n}{n!} < 1$$

となる.

一方、部分積分を繰り返し行うことで、下記の等式が得られる。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi f(x) \sin x dx &= \left[f(x)(-\cos x) \right]_0^\pi + \int_0^\pi f'(x) \cos x dx \\ &= (f(\pi) + f(0)) + \left[f'(x) \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi f^{(2)}(x) \sin x dx \\ &= (f(\pi) + f(0)) - \int_0^\pi f^{(2)}(x) \sin x dx \\ &= (f(\pi) + f(0)) - (f^{(2)}(\pi) + f^{(2)}(0)) + \int_0^\pi f^{(4)}(x) \sin x dx \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)) + (-1)^{n+1} \int_0^\pi f^{(2n+2)}(x) \sin x dx \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0)). \end{aligned}$$

ここで $f(x)$ は $2n$ 次多項式なので $f^{(2n+2)}(x) = 0$ であることに注意する。

背理法の仮定 $\pi = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{N}$) より得られる

$$f(x) = \frac{1}{n!} x^n (a - bx)^n$$

という本来ありえない式から

$$(3) \quad \int_0^\pi f(x) \sin x dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k (f^{(2k)}(\pi) + f^{(2k)}(0))$$

が整数になることを示す.

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ に対して, $f^{(k)}(x)$ は x で割り切れるので $f^{(k)}(0) = 0$ である. $k = n, n+1, \dots, 2n$ に対して, Lemma 1 の $g(x)$ を $x^n(a - bx)^n$ とみなせば, $g^{(k)}(x)$ のすべての係数は $k!$ で割り切れるので, とくに $n!$ でも割り切れる. ゆえに $f^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} g^{(k)}(x)$ は, 整数係数の多項式となり $f^{(k)}(0)$ は整数となる.

さらに, f の定義式(1) より

$$f(x) = f(\pi - x)$$

である.

この式の両辺を x で k 回微分すると

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$$

なので

$$f^{(k)}(\pi) = (-1)^k f^{(k)}(0)$$

であり, $k = 0, 1, \dots, 2n$ に対して $f^{(k)}(\pi)$ が整数であることがわかる.
したがって, 等式 (3) の右辺は整数となり, 不等式 (2) に矛盾. $\square$

2. 円周率の近似計算

項別積分を利用して,

$$\text{Tan}^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

の Taylor 展開 を求める.

等比級数の公式より $-1 < t < 1$ に対して

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tan}^{-1}(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (-1)^n t^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n+1} \right]_0^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (-1 < x < 1). \end{aligned}$$

積分と無限級数の順序交換を項別積分と呼ぶが、実はこの交換は一般には許されない．数学科では極限交換を行うための十分条件を与えるために、これまでの極限の定義の変更を行う．

前記の等式において、 $x \rightarrow 1$ とする極限を考える． Tan^{-1} は $\mathbb{R}$ 上連続なので $\lim_{x \rightarrow 1} \text{Tan}^{-1}(x) = \text{Tan}^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ である．一方、級数において $x = 1$

とした場合、 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ であり、一般項が 0 へ収束する交代級数なので収束する．

Able の収束性定理よりこの級数の値は $\text{Tan}^{-1}(1)$ と一致することが知られている．

Lemma 2 $-1 < x \leq 1$ をみたす任意の x に対して、

$$\text{Tan}^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

とくに

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

この級数により円周率の近似値が計算できるが、収束が遅く実用的でない。実際に部分和

$$S(N) = \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

の値は以下のようなになる。

N	$S(N)$	$S(N) - \pi$
10^1	3.232315809	0.090723155
10^2	3.151493401	0.009900747
10^3	3.142591654	0.000999000
10^4	3.141692644	0.000099990
10^5	3.141602653	0.000009999

N を 10 倍すると精度がだいたい 1 桁よくなるという状況であることがわかる。

Theorem 2 (Machin)

$$\pi = 16 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}.$$

Proof. (文献 [M] p.157 問題 6.2.5) $\tan \theta = \frac{1}{5}$ となる $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ に対して, 以下が成立:

$$\tan 4\theta = \frac{120}{119}, \quad \tan(4\theta - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{239}.$$

ゆえに

$$\frac{\pi}{4} = 4\theta - \tan^{-1} \frac{1}{239} = 4 \cdot \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

が得られる. この等式に Lemma 2 にある $\tan^{-1}$ の Taylor 展開を用いればよい. $\square$

Remark 1 *Machin* (1685年–1751年)は, 数学者でなく天文学者であった. 三角関数表を眺めているうちにこの公式に気づいたといわれている.

円周率 π の近似計算において Machin の公式がいかに強力であるかは実際に計算機で計算するとよくわかる．部分和

$$M(N) = 16 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^{2n+1} - 4 \sum_{n=0}^N \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{1}{239}\right)^{2n+1}$$

の値は以下のようになる．

N	$M(N)$	$M(N) - \pi$
1	3.140597029	-0.000995625
2	3.141621029	0.000028375
3	3.141591772	$-0.882 * 10^{-6}$
4	3.141592682	$0.28 * 10^{-7}$
5	3.141592653	$-0.1 * 10^{-8}$

$N = 5$ で小数第 8 位まで一致し， N が 1 増えると精度がだいたい 1 桁よくなるという状況であることがわかる．約 50 年ぐらい前までは，この公式によって円周率の近似計算が行われていた．

3. 算術幾何平均による近似計算

1976年に Brent と Salamin が算術幾何平均を用いて円周率 π の値を効率よく計算する手段を発表した.

まず $a > b > 0$ なる2つの実数 a, b の算術幾何平均 $AGM(a, b)$ の定義を与える. 2つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を初項を $a_0 = a, b_0 = b$ で与え, 漸化式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

により定める.

相加平均と相乗平均の関係より $a_n > b_n$ であり, a_{n+1} と b_{n+1} は a_n と b_n の平均であることから $a_{n+1} < a_n, b_{n+1} > b_n$ である.

ゆえに

$$b = b_0 < b_1 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_1 < a_0 = a$$

であり, $\{a_n\}, \{b_n\}$ はともに有界な単調数列なので収束する.

そこで

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$$

とにおいて, 等式 $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$ の $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

なので, $\alpha = \beta$ となる. a, b を初項とする数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の共通極限 α を a と b の算術幾何平均といい, $AGM(a, b)$ で表す.

Gauss は算術幾何平均と円周率 π との関係を与えた.

Theorem 3 (Gauss, 1809 年)

$$\pi = \frac{2AGM(1, \frac{1}{\sqrt{2}})^2}{1 - \sum_{k=0}^{\infty} 2^k c_k^2}.$$

ここで, $a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ として上記のように数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を与え,

$$c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$$

とする.

この定理の証明には楕円関数論が必要である. 興味のある方は文献 [TI], [U] を見るとよい.

Brent と Salamin は, Theorem 3 にある円周率 π の表示式がとても早く収束し, π の近似計算に威力を発揮することを主張した. 収束の早さを計算機による数値計算で確かめる. $a_0 = 1, b_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とし,

$$BS(N) = \frac{2a_N}{1 - \sum_{k=0}^N 2^k c_k^2}$$

とする.

N	$BS(N)$	$BS(N) - \pi$
1	4	0.8584073464
2	3.1876726427121086	0.04607998912
3	3.141680293297653294	0.00008763970786
4	3.1415926538954464960030	$0.3056532575 * 10^{-9}$
5	3.141592653589793238466360602706	$0.3717219427 * 10^{-20}$

$N = 4$ で小数第 9 位まで一致し, N が 1 増えると誤差がだいたい 2 乗されていく状況であることがわかる.

4. その他の π の表示

Theorem 4 (Ramanujan, 1914 年)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4} \frac{1103 + 26390n}{396^{4n}}.$$

Theorem 5 (Chudonovsky 兄弟, 1987 年)

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)!}{(3n)! (n!)^3} \frac{13591409 + 545140134n}{640320^{3n+3/2}}.$$

Theorem 6 (Adamchik and Wagon, 1997 年)

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} \left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right).$$

Theorems 4, 5 の証明には, 保型関数 $j(\tau)$ に関する事実が必要となるのでここでは紹介しない. Theorem 6 は下記のように初等的に証明できる.

Proof of Theorem 6. 等比級数の公式

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - \cdots + (-1)^n x^{4n} + \cdots \quad (|x| < 1)$$

と項別積分を利用して, $k = 1, 2, 3$ に対して以下の等式が得られる.

$$\begin{aligned} \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x^{k-1}}{1+x^4} dx &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \left(x^{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-x^4)^n \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^{1/\sqrt{2}} x^{4n+k-1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{4n+k} x^{4n+k} \right]_0^{1/\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{2^{k/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(4n+k)}. \end{aligned}$$

この式を利用して, Theorem 6 内の級数を積分で表示する.

$$\begin{aligned}
 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4} \left(\frac{2}{4n+1} + \frac{2}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} \right) \\
 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2 \cdot 2^{1/2} x^{1-1} + 2 \cdot 2^{2/2} x^{2-1} + 2^{3/2} x^{3-1}}{1+x^4} dx \\
 &= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}(1+x^2) + 4x}{1+x^4} dx.
 \end{aligned}$$

変数変換 $x = y/\sqrt{2}$ を行くと上記の積分は

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 \frac{2(1+y^2/2) + 2y}{1+y^4/4} dy = 4 \int_0^1 \frac{y^2 + 2y + 2}{y^4 + 4} dy \\
 &= 4 \int_0^1 \frac{y^2 + 2y + 2}{(y^2 - 2y + 2)(y^2 + 2y + 2)} dy = 4 \int_0^1 \frac{1}{(y-1)^2 + 1} dy \\
 &= 4 \left[\tan^{-1}(y-1) \right]_0^1 = \pi
 \end{aligned}$$

となる.

□

参考文献

[BBB] L. Berggren, J. Borwein and P. Borwein, *Pi: A Source Book* (Second Edition), Springer (1997).

[K] 金田 康正, π のはなし, 東京図書 (1991).

[L] F. Lindemann, Über die Zahl π , *Math. Ann.* **20** (1882), 213–225.

[M] 三宅 敏恒, 入門微分積分, 培風館 (1992).

[N] I. Niven, A simple proof that π is irrational, *Bull. Amer. Math. Soc.* **53** (1947) 509.

[NM] 数学辞典, 第4版, 日本数学会編集, 岩波書店 (2007).

[PLM] A.S. Posamentier and I. Lehmann, 松浦 俊輔 訳, 不思議な数 π の伝記, 日経BP社 (2005).

[S] 塩川 宇賢, 無理数と超越数, 森北出版 (1999).

[T1] 高木 貞治, 解析概論, 改訂第3版 軽装版, 岩波書店 (1983).

[T2] 高木 貞治, 近世数学史談, 共立出版 (1933).

[TI] 竹之内 修, 伊藤 隆, $\pi - \pi$ の計算 アルキメデスから現代まで— 共立出版 (2007).

[U] 梅村 浩, 楕円関数論, 東京大学出版会 (2000).