$\mathbf{R}^2$ 上の関数

$$z = f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{1}$$

を考える。関数 $f(x,y)$ は分母 x^2+y^2 が零となるのは $(x,y)=(0,0)$ だけなので $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ 上で C^∞ 級である。$(x,y)=(0,0)$ においては $(x,y)=(t\cos\theta, t\sin\theta)$ とおいて $t \to 0$ とすると

$$\lim_{t\to 0} f(t\cos\theta, t\sin\theta) = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2\cos\theta\sin\theta}{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta} = \sin(2\theta)$$

となり θ の値によって -1 から 1 までのすべての値を取り得るので $(0,0)$ では連続ではない。一方、この関数を集合 $\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \mid y=0\}$ 上に定義域を制限してみると恒等的に 0 となる。したがって $(0,0)$ で x に関して偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$$

である。同様に $(0,0)$ で y に関して偏微分可能で

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

である。つまり関数 $f(x,y)$ は $(x,y)=(0,0)$ では連続ではないが、x についても y についても偏微分可能で偏微分係数はともに 0 となっている。このような関数 $z=f(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における振る舞いは以下の Stereographic Figures にとてもよく現れている。

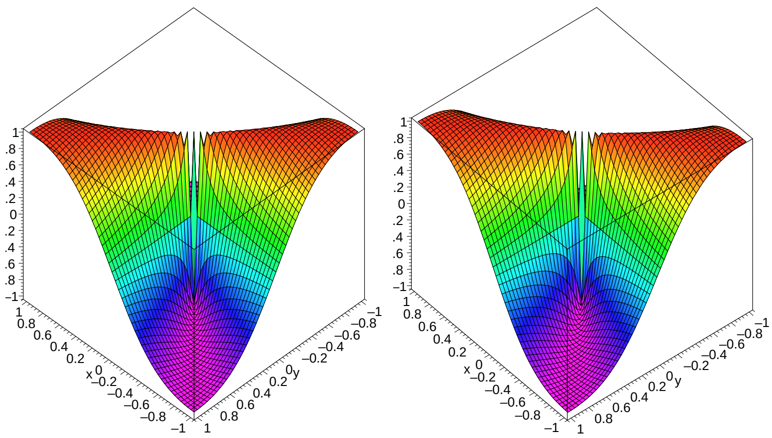

Figure 1: 関数 $z=f(x,y)$ の Stereographic Figures

次に領域 $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x > 0\}$ 上で定義された関数

$$z = g(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2x} \tag{2}$$

に対して $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ を考える。$(x, y) = (t\cos\theta, t\sin\theta),\quad t > 0,\ \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ とおいて $t \downarrow 0$ とすると

$$\lim_{t\downarrow 0} g(t\cos\theta, t\sin\theta) = \lim_{t\downarrow 0} \frac{t^2\cos^2\theta + t^2\sin^2\theta}{2t\cos\theta} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{t}{2\cos\theta} = 0$$

となるので、半直線にそって (x, y) を $(0, 0)$ に近づけるとその極限値は 0 である。一方、正数 k に対して定まる中心 $(k, 0)$ 半径 k の円 C_k

$$(x - k)^2 + y^2 = k^2, \quad \text{i.e.} \quad x^2 + y^2 = 2kx$$

に沿って (x, y) を $(0, 0)$ に近づけたときの $g(x, y)$ の極限値は

$$\lim_{C_k \ni (x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \lim_{C_k \ni (x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{2x} = \lim_{x\downarrow 0} \frac{2kx}{2x} = k$$

となり k の値によって異なる値を取ることになる。つまり、関数 $g(x, y)$ は定義域内で $(0, 0)$ 近づき得るあらゆる半直線に沿って $(0, 0)$ に近づけるとそのときの極限値は必ず 0 となるが、円 C_k に沿って近づけると k の値によって極限値が変わってしまう。したがって

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$$

は存在しない。このような関数 $z = g(x, y)$ の $(x, y) = (0, 0)$ における振る舞いは以下の Stereographic Figures にとてもよく現れている。

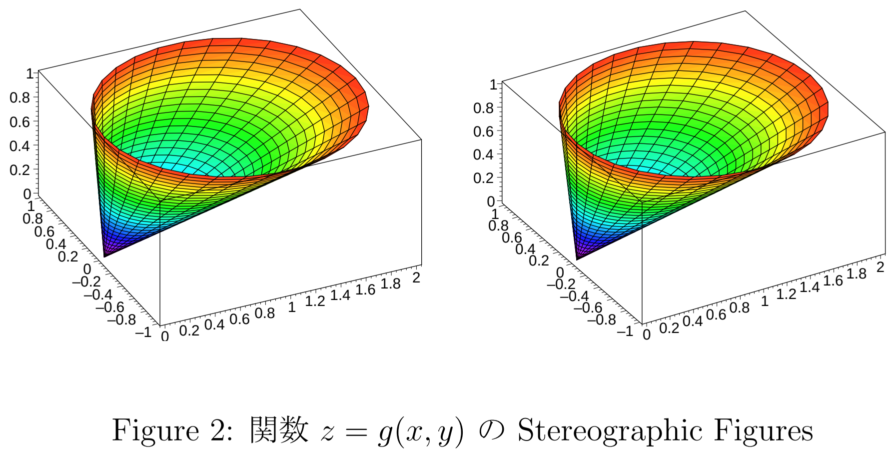

Figure 2: 関数 $z = g(x, y)$ の Stereographic Figures