

数学概論 レポート問題

- 出題日: 1月20日(月)
- 提出期限: 2月3日(月) 10:30
- 提出先: レポートボックス No. 38

1 $\mathbb{R}^2$ 上の関数 $f(x, y)$ を以下で定める:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0), \\ xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0). \end{cases}$$

- (1) $\mathbb{R}^2$ 上で $f(x, y)$ は x でも y でも偏微分可能であることを示し, その偏導関数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ を求めよ.
- (2) $\frac{\partial}{\partial y} f_x(0, 0)$ と $\frac{\partial}{\partial x} f_y(0, 0)$ の値を求めよ.

2 自然数 n に対して, 閉区間 $[0, 1]$ 上の関数 $f_n(x)$ を以下で定める:

$$f_n(x) = \begin{cases} n - |2n^2x - n| & \text{if } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{if } \frac{1}{n} < x \leq 1. \end{cases}$$

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx$ を求めよ.
- (2) $x \in [0, 1]$ に対して, $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ.
- (3) $\int_0^1 f(x) dx$ を求めよ. また, $f_n(x)$ が $f(x)$ に $[0, 1]$ 上で一様収束するか根拠を述べて判定せよ.

3 $\mathbb{R}^2$ 内の集合 $D = [0, 1] \times [0, 1] - \{(0, 0)\}$ 上の連続関数 $f(x, y)$ を $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ で定める.

- (1) 累次積分 $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$ の値を求めよ.
- (2) 累次積分 $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx$ の値を求めよ.
- (3) $f(x, y)$ は D 上で広義重積分可能か根拠を述べて判定せよ.