数学概論　レポート問題

- 出題日: 12 月 09 日 (月)
- 提出期限: 12 月 23 日 (月) 10:30
- 提出先: レポートボックス No. 38

$\boxed{1}$ 区間 I 上の関数 $f(x)$ と区間 J の関数 $g(x)$ に対して,
$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\} \subset J$ をみたすとき, 合成関数

$$g \circ f : I \ni x \mapsto g(f(x)) \in \mathbb{R}$$

が定義される. このとき, f が I 上連続で, g が J 上連続ならば, $g \circ f$ は I 上連続であることを示せ.

$\boxed{2}$ 区間 $[0, \infty)$ 上の連続関数 $f(x)$ は,

$$f(x) > 0 \text{ for } {}^{\forall}x \in I, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

をみたすとする.

(1) 方程式 $f(x) = x$ には, $[0, \infty)$ に解が存在することを示せ.

(2) 集合 $\{x \in [0, \infty) \mid f(x) > f(0)/2\}$ は上に有界であることを示せ.

(3) 関数 $f(x)$ は $[0, \infty)$ 上で最大値を取ることを示せ.

$\boxed{3}$ 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は区間 I に値をとる基本列であり, I 上の関数 $f(x)$ は I 上一様連続であるとする. このとき, 数列 $\{f(a_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ は基本列になることを示せ.

$\boxed{4}$

(1) 区間 I 上で連続であるが, I 上で微分可能でない関数の例を与えよ.

(2) 区間 I 上で微分可能であるが, I 上で C^1 級でない関数の例を与えよ.

(3) 区間 I 上で C^1 級であるが, I 上で 2 回微分可能でない関数の例を与えよ.