${}_3F_2(1,1,q;a,b;1)$ はいつ $\log$ で書けるか？

(大坪紀之氏 (千葉大), 寺杣友秀氏 (東大数理) との共同研究)

朝倉政典 (北大理)

超幾何・数論幾何研究交流会, 北海道大学

2016 年 3 月 9 日

Contents

一般超幾何関数

一般超幾何関数とは, 次で定義される関数である

$$ {}_{n+1}F_n\left(\begin{matrix} a_1, \cdots, a_{n+1} \\ b_1, \cdots, b_n \end{matrix}; x\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(a_1)_i \cdots (a_{n+1})_i}{(b_1)_i \cdots (b_n)_i} \frac{x^i}{i!} $$

$$ (a)_i = a(a+1)\cdots(a+i-1), \quad \text{(Pochhammer の記号)} $$

$n = 1$ のとき Gauss 超幾何関数という.

超幾何関数は $\mathbb{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ 上に解析接続されて, 多価関数になる. その他, 微分方程式, 積分表示などといった基本的な性質がよく知られている.

超幾何関数の特殊値についても, いろいろな公式が知られている.

その中でも (おそらく) 一番有名なのがこれ！

[Gauss の公式]

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; 1\right) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}, \quad \mathrm{Re}(c-a-b) > 0 $$

これ以外にも, 超幾何関数の特殊値については, 大量の公式がある！
例えば, Wolfram のサイトにいくと, Gauss 超幾何関数の特殊値だけで, なんと１０万個以上！

この講演では, $a, b, q \in \mathbb{Q}$ で

$$a,\ b,\ q,\ a-q,\ b-q,\ a+b-q \notin \mathbb{Z}$$

であるようなものに対して, $x = 1$ での特殊値

$$B(a,b){}_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, q \\ a+b, q+1 \end{matrix}; 1\right) = \frac{q}{ab} \cdot {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, a+b-q \\ a+1, b+1 \end{matrix}; 1\right)$$

を論じる (等号は Dixon の公式 [1], ただし右辺は $q > 0$ でないと収束しない).

(ちなみに, Wolfram のサイトには ${}_3F_2$ の公式が 4 万個以上！)

[1] Thomae の公式?

$\mathbb{C}$ の部分空間

$$\overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^{\times} = \{\alpha_0 + \sum \alpha_i \log \beta_i \text{ (有限和)} \mid \alpha_i \in \overline{\mathbb{Q}},\ \beta_j \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}\}$$

とおく ($\log(1) = 2\pi i$ と考え $2\pi i\overline{\mathbb{Q}}$ も含まれるとする). この講演の題目にある "$\log$ で書ける" は, 次の意味で使っている.

$$\text{複素数 } \lambda \text{ が } \log \text{ で書ける} \overset{\text{def}}{\iff} \lambda \in \overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

問題

$a, b, q \in \mathbb{Q}$ を, $q, a, b, q-a, q-b, q-a-b \notin \mathbb{Z}$ なるものとする. このとき,

$$B(a,b)_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, q \\ a+b, q+1 \end{matrix}; 1\right) \text{ または } {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, a+b-q \\ a+1, b+1 \end{matrix}; 1\right)$$

は $\log$ で書けるか？

隣接関係

$$F := {}_3F_2\left(\begin{matrix}1,1,q\\a,b\end{matrix};1\right)$$

とおく. このとき次の隣接関係式がある

$$(a-q-1)(b-q-1)F + q(a+b-3-q)F[q+1] = (a-1)(b-1),$$

$$(a-1)(a+b-q-3)F[a-1] - (a-q-1)(a-2)F = (a-1)(b-1).$$

ここで $F[q+1] := {}_3F_2\left(\begin{matrix}1,1,q+1\\a,b\end{matrix};1\right)$, など.

よって, a,b,q を整数だけずらしても, 特殊値は “変わらない”.

隣接関係の証明

$$F(x) := {}_3F_2\left(\begin{matrix}1, c, q\\ a, b\end{matrix}; x\right), \quad F[q+1](x) := {}_3F_2\left(\begin{matrix}1, c, q+1\\ a, b\end{matrix}; x\right), \quad \text{etc.}$$

と書くことにする. このとき Taylor 展開の直接計算により

$$\begin{aligned}(a-q-1)(b-q-1)F(x) + q(a+b-3-2q-(c-q-1)x)F[q+1](x)\\ + q(1+q)(1-x)F[q+2](x) = (a-1)(b-1),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a-2)(a-1)(1-x)F[a-2](x)+(a-1)((2a-c-q-3)x-a+b+1)F[a-1](x)\\ -(a-q-1)(a-c-1)xF[a](x) = (a-1)(b-1)\end{aligned}$$

が成り立つ. これに $x=1$ を代入する. (証明終)

Watson の公式

定理 (Watson, Proc. London Math. 1918)

$$B(a,b)\,{}_3F_2\left(\begin{matrix} a,\, b,\, \frac{a+b-1}{2} \\ a+b,\, \frac{a+b+1}{2} \end{matrix};1\right) = \frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{a+1}{2}\right) + \psi\left(\frac{b+1}{2}\right) - \psi\left(\frac{a}{2}\right) - \psi\left(\frac{b}{2}\right)\right).$$

ここで $\psi(x) = \Gamma'(x)/\Gamma(x)$.

$\alpha \in \mathbb{Q}^\times$ のとき $\psi(\alpha) \in -\gamma + \overline{\mathbb{Q}}\log(\mathbb{Q}(\mu_\infty)^\times)$ である (Gauss). 従って

系

$a+b \equiv 2q$ mod $\mathbb{Z} \Longrightarrow B(a,b)\,{}_3F_2(a,b,q;a+b,q;1)$ は $\log$ で書ける.

(例) $(a,b,q)=(7/6,5/6,1/2)$ のとき,

$$\frac{2\pi}{6}\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{7}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2}\\ 2,\frac{3}{2}\end{matrix};1\right)\overset{\text{Watson}}{=}\frac{1}{2}\left(\psi\left(\frac{13}{12}\right)+\psi\left(\frac{11}{12}\right)-\psi\left(\frac{7}{12}\right)-\psi\left(\frac{5}{12}\right)\right)$$
$$\overset{\text{Gauss}}{=}6-2\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}).$$

隣接関係を使うと

$$2\pi\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{2}\\ 1,\frac{3}{2}\end{matrix};1\right)=3\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3})$$

を得る (cf. 2015 年 11 月, 非公式セミナー (朝倉)).

主定理

[記号]

- 全単射 $[0,1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の逆写像を $\{-\} : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to [0,1)$ と書く.

$$例. \quad \left\{\frac{3}{2}\right\} = \frac{1}{2}, \quad \left\{\frac{10}{7}\right\} = \frac{3}{7}, \quad \{x\} = 0 \ \Leftrightarrow \ x \in \mathbb{Z}.$$

- $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \supset \hat{\mathbb{Z}}^\times = \varprojlim_n (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$.

$\hat{\mathbb{Z}}$ は, 全射 $\hat{\mathbb{Z}} \to \hat{\mathbb{Z}}/n\hat{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を通して, $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に作用し, 従って $\hat{\mathbb{Z}}$ は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \bigcup_n \frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ に作用する. こうして次の自然な同型が得られる.

$$\hat{\mathbb{Z}}^\times \cong \mathrm{Aut}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}).$$

次がこの講演の主定理である.

定理 (大坪-A, 寺杣, 2016)

$a, b, q \in \mathbb{Q}$ 有理数で, $a, b, q, q-a, q-b, q-a-b \notin \mathbb{Z}$ とする. 次の条件を満たすと仮定する.

$$\{sq\} + \{s(-q+a)\} + \{s(-q+b)\} + \{s(q-a-b)\} = 2, \quad \forall s \in \hat{\mathbb{Z}}^\times \quad (\clubsuit)$$

ただし ($\clubsuit$) において $a, b, q \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ とみなしている. このとき

$$B(a,b)_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, q \\ a+b, q+1 \end{matrix}; 1\right) \in \overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^\times.$$

(注意) 上の特殊値の具体的な表示は (いくつかの場合を除き) 分かっていない.

主定理の条件 (♣) を満たす (a,b,q) はどのくらいあるか？

$a,b,q\in\mathbb{Q}$ s.t. $a,b,q,q-a,q-b,q-a-b\notin\mathbb{Z}$ を固定し

$$p_s := \{sq\}+\{s(-q+a)\}+\{s(-q+b)\}+\{s(q-a-b)\},\quad s\in\hat{\mathbb{Z}}^\times$$

とおく.

性質

$a,b,q\in\frac{1}{n}\mathbb{Z}$ とすると, p_s は $s\in(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ にしかよらない.

(理由) $\frac{1}{n}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ への $\hat{\mathbb{Z}}^\times$ の作用は有限商 $\hat{\mathbb{Z}}^\times\to(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ を経由するから.

性質

$p_s\in\{1,2,3\}$.

(理由) $p_s\equiv sq+s(-q+a)+s(-q+b)+s(q-a-b)=0$ mod $\mathbb{Z}$ ゆえ $p_s\in\mathbb{Z}$. 一方, $0\le\{x\}<1$ より $0<p_s<4$ である.

例 (Watson の公式の条件)

$a+b \equiv 2q \bmod \mathbb{Z} \Longrightarrow \forall s$, $p_s = 2$. つまり条件 (♣) を満たす.

(証明) $x \notin \mathbb{Z}$ ならば $\{x\}+\{-x\}=1$ である. よって

$$\begin{aligned} p_s &= \{sq\}+\{s(-q+a)\}+\{s(-q+b)\}+\{s(q-a-b)\} \\ &= \overbrace{\{sq\}+\{s(q-a-b)\}}^{1}+\overbrace{\{s(-q+a)\}+\{s(-q+b)\}}^{1} \\ &= 2. \end{aligned}$$

例

$(q, a-q, b-q, q-a-b) = (e, e+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -2e)$, $\exists e \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow$ (♣) OK.

例

$(q, a-q, b-q, q-a-b) = (e, e+\frac{1}{3}, e+\frac{2}{3}, -3e)$, $\exists e \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow$ (♣) OK.

例

$a = \frac{1}{6}, b = \frac{5}{6}, q = \frac{1}{7}$ のとき, 条件 (♣) は不成立.

実際

s	1	5	11	13	17	19	23	25	29	31	37	41
p_s	1	2	2	3	2	2	2	2	1	2	2	3

となって $p_s \neq 2$ となるものが存在する.

我々は, 一般に次が成り立つと予想している.

予想

$a, b, q \in \mathbb{Q}$ s.t. $a, b, q, q-a, q-b, q-a-b \notin \mathbb{Z}$ とする.

$$(\clubsuit)\ \text{が成立} \quad \Longleftrightarrow \quad B(a,b)_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, q \\ a+b, q+1 \end{matrix}; 1\right) \in \overline{\mathbb{Q}} + \overline{\mathbb{Q}} \log \overline{\mathbb{Q}}^{\times}.$$

塩田, 青木, 寺杣らによって, フェルマー多様体のホッジサイクルの研究から, 条件 ($\clubsuit$) を満たす組 (a, b, q) の分類は完全に与えられている.

問題

条件 ($\clubsuit$) を満たす組 (a, b, q) に対し, 上の特殊値の具体表示を与えよ.

Watson の公式に含まれない例

$$
\begin{aligned}
B\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right) {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{4}\\ 1,\frac{5}{4}\end{matrix};1\right) &= 2\pi\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6},\frac{5}{6},\frac{1}{4}\\ 1,\frac{5}{4}\end{matrix};1\right)\\
&= \frac{12^{\frac{3}{4}}}{2}\log\left(\frac{3^{\frac{5}{4}}-3^{\frac{3}{4}}+\sqrt{2}}{3^{\frac{5}{4}}-3^{\frac{3}{4}}-\sqrt{2}}\right) - 12^{\frac{3}{4}}\mathrm{Cos}^{-1}\left(\frac{3^{\frac{5}{4}}+3^{\frac{3}{4}}}{2\sqrt{5+3\sqrt{3}}}\right)
\end{aligned}
$$

$\alpha \in \mathbb{Q}$ のとき $\psi(\alpha) \in -\gamma + \overline{\mathbb{Q}}\log(\mathbb{Q}(\mu_\infty)^\times)$, つまり $\log$ の中は円分体の元しか現れない. 一方, 上の式の $\log$ の中には $\mathbb{Q}$ の非可換ガロア拡大の元が現れている. この理由から, 上の結果を Watson の公式に帰着させせることは不可能と思われる (主定理は Watson の公式を “本質的” に拡張していると考えられる).

混合ホッジ構造

重さ n の Hodge 構造とは次からなるデータ $H = (H_B, H_{\mathrm{dR}}, F^\bullet, \iota)$ のことをいう．

- H_B: 有限次元 $\mathbb{Q}$ ベクトル空間
- H_{dR}: 有限次元 $\mathbb{C}$ ベクトル空間
- $F^\bullet = F^\bullet H_{\mathrm{dR}}$: H_{dR} の filtration (Hodge filtration という)
- $\iota : \mathbb{C} \otimes H_B \cong H_{\mathrm{dR}}$ 同型写像 (比較同型という)
- $H^{p,q} := F^p \cap \overline{F}^q \subset H_{\mathrm{dR}}$ とおくと，次の分解 (Hodge 分解) が成り立つ：

$$H_{\mathrm{dR}} = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$$

定理 (Hodge, 1930's)

X をコンパクトケーラー多様体とする．このとき
$H^n(X, \mathbb{Q}) = (H^n_B(X, \mathbb{Q}), H^n_{\mathrm{dR}}(X/\mathbb{C}), F^\bullet, \iota)$ は重さ n の Hodge 構造になる．

混合 Hodge 構造とは次からなるデータ $H = (H_B, H_{\mathrm{dR}}, F^\bullet, W_\bullet, \iota)$ のことをいう.

- $H_B, H_{\mathrm{dR}}, F^\bullet, \iota$: 前と同じ
- $W_\bullet = W_\bullet H_B$: H_B の filtration (weight filtration という)
- 各 n について, $(\mathrm{Gr}_n^W H_B, \mathrm{Gr}_n^W H_{\mathrm{dR}}, F^\bullet, \iota)$ は重さ n のホッジ構造である.

定理 (Deligne, 1974)

X を $\mathbb{C}$ 上の代数多様体とする (非特異ともコンパクトとも仮定しない). このとき混合 Hodge 構造 $H^n(X, \mathbb{Q}) = (H_B^n(X, \mathbb{Q}), H_{\mathrm{dR}}^n(X/\mathbb{C}), F^\bullet, W_\bullet, \iota)$ が自然に定まる.

1 次元の Hodge 構造のことを Tate-Hodge 構造という. 具体的には, Hodge type $(-r,-r)$ となるものは同型を除きひとつしかなく, それを $\mathbb{Q}(r)=(\mathbb{Q},\mathbb{C},F^\bullet,\iota)$ s.t.

- $F^{-r}\mathbb{C}=\mathbb{C}$, $F^{-r+1}=0$
- $\iota:\mathbb{Q}\to\mathbb{C}$, $1\mapsto(2\pi i)^r$

とかく. また $\mathbb{Q}(0)$ は $\mathbb{Q}$ と略記することが多い.

例

$H^1(\mathbb{C}^\times,\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}(-1)$ (重さ 2 の Tate Hodge 構造).

$\gamma\in H_1^B(\mathbb{C}^\times)$ を原点の回りを半時計回りに 1 周するサイクル, $\gamma^*\in H_B^1(\mathbb{C}^\times)$ 双対基底とする. $\iota:H_B^1(\mathbb{C}^\times)=\mathbb{Q}\gamma^*\to H_{\mathrm{dR}}(\mathbb{C}^\times)=\mathbb{C}\frac{dt}{t}$, $\gamma^*\mapsto(2\pi i)^{-1}\frac{dt}{t}$ (これが $\mathbb{Q}(r)$ の定義に $(2\pi i)^r$ が現れる理由のひとつ！)

例

$C=\mathbb{C}/0\sim1$ (=複素平面の 2 点 $0,1$ をくっつけたもの) $\Longrightarrow$ $H^1(C,\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}$ (重さ 0 の Tate Hodge 構造).

H を混合 Hodge 構造とする. 混合 Hodge 構造の完全列の同型類の集合

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, H) = \{0 \to H \to M \to \mathbb{Q} \to 0\}/\cong$$

を米田の拡大群という.

混合 Hodge 構造の完全列 $0 \to H \to M \to \mathbb{Q} \to 0$ に対し, 2 つの完全列

$$0 \to W_0 H_B \to W_0 M_B \to \mathbb{Q} \to 0,$$

$$0 \to F^0 W_0 H_{\mathrm{dR}} \to F^0 W_0 M_{\mathrm{dR}} \to \mathbb{C} \to 0$$

が生じる. $1 \in \mathbb{Q}$ と $1 \in \mathbb{C}$ の持ち上げを $e_B \in W_0 M_B$, $e_{\mathrm{dR}} \in F^0 W_0 M_{\mathrm{dR}}$ とする.

$$e(M) := e_{\mathrm{dR}} - \iota(e_B) \in W_0 H_{\mathrm{dR}} / F^0 W_0 H_{\mathrm{dR}} + \iota(W_0 H_B)$$

を extension data という.

定理 (Carlson)

$M \longmapsto e(M)$ という対応によって次の同型を引き起こす.

$$\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, H) \cong W_0 H_{\mathrm{dR}} / F^0 W_0 H_{\mathrm{dR}} + \iota(W_0 H_B).$$

例：$\mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(1)) \cong \mathbb{C}/2\pi i \mathbb{Q}$.
$C = \mathbb{C}/0 \sim 1$ とする. $\alpha \in C$, $\alpha \neq 0, 1$ として次の完全列を考える.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(C, \mathbb{Q}(1)) \arrow[r] & H^1(C \setminus \{\alpha\}, \mathbb{Q}(1)) \arrow[r] & \mathbb{Q} \arrow[r] & 0 \\ & \mathbb{Q}(1) \arrow[u, "\cong"] & & & \end{tikzcd}$$

このとき Carlson の同型の下, 上の extension data は次で与えられる.

$$\pm \int_0^1 \frac{dt}{t - \alpha} = \pm \log(1 - \alpha^{-1}) \in \mathbb{C}/2\pi i \mathbb{Q}.$$

次の事実は, motivic cohomology および Beilinson regulator の一般論からの帰結である.

定理

$\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された代数多様体のコホモロジーから生じる混合ホッジ構造の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}(1) \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

の extension data $e(M)$ は, $\exists \alpha \in \overline{\mathbb{Q}}^{\times}$ があって

$$e(M) = \log(\alpha)$$

と書ける.

主定理は, 上の定理に帰着させることによって証明する. (実際には, 上の完全列を具体的に構成するので, 従って α も具体的に分かる.)

主定理の証明

X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された代数曲面, $D \subset X$ を因子とする.

$$0 \longrightarrow H_2(X,\mathbb{Q})/H_2(D) \longrightarrow H_2(X,D;\mathbb{Q}) \longrightarrow H_1(D,\mathbb{Q})$$

という混合 Hodge 構造の完全列を考える.

$\gamma \neq 0 \in H_1(D,\mathbb{Q}) \cap H^{0,0}$ が存在すると仮定する. このとき上の完全列から

$$0 \longrightarrow H_2(X,\mathbb{Q})/H_2(D) \longrightarrow M \longrightarrow \mathbb{Q} \longrightarrow 0$$

が得られ, この完全列の extension data

$$e(M) \in \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, H_2(X,\mathbb{Q})/H_2(D))$$

が定まる.

主定理の証明の方針

1. $e(M)$ が超幾何関数 ${}_3F_2$ の $x=1$ の特殊値として表されるような X, D を与える.
2. E を X の因子で D と直交するとする. 引き戻し写像 $i_E^* : H_2(X)/H_2(D) \to \mathbb{Q}(1)$ により
$$i_E^*(e(M)) \in \mathrm{Ext}(\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(1)) = \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Q}$$
が得られる. Beilinson regulator の一般論より, これは $\log$ で書ける.
3. 上の 2 つを合わせて, ${}_3F_2$ の $x=1$ の特殊値が $\log$ で書けることが従う.

証明のポイントは 1 にあるような X, D を見つけることである. また 2 を実行する際のポイントは, E の存在すなわち D 以外のホッジサイクルが存在するかどうかである.

次の 2 通りの方法がある

- $X =$ 超幾何ファイブレーション, $D =$ 退化ファイバー (大坪・朝倉)
- $X =$ フェルマー曲面, $D =$ 有理曲線の和 (寺杣)

ファイブレーションによる方法

代数多様体 X から代数曲線 C への全射正則写像 $f : X \to C$ を**ファイブレーション**という.

Asakura, Otsubo, *CM periods, CM regulators and hypergeometric functions, II*, preprint, arXiv:1503.08894.

の中で次の条件を満たすファイブレーションを研究した：

- $C = \mathbb{P}^1$ で f は $t = 0, 1, \infty$ の外で smooth.
- ある代数体 K が $R^1 f_* \mathbb{Q}$ に作用していて, $\dim_K R^1 f_* \mathbb{Q} = 2$.
- $t = 1$ のまわりの local monodromy T は unipotent でかつ $\operatorname{rank}(N) = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{Q}} R^1 f_* \mathbb{Q}$, $N := \log T$. ($t = 1$ で極大退化という).

条件を満たすファイブレーションの典型例は, 超幾何ファイブレーションである.

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad f^{-1}(t) : y^N = x^a(1-x)^b(1-tx)^{N-b},$$

$$0 < a, b < N, \quad \gcd(N, a, b) = 1.$$

$f : X \to \mathbb{P}^1$ を前の通りとする. $n \geq 1$ を整数とし $f^{(n)} : X^{(n)} \to \mathbb{P}^1$ を $t = s^n$ と変換して得られるファイブレーションとする.

$$\begin{tikzcd} X^{(n)} \arrow[r] \arrow[d, "f^{(n)}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "s \mapsto s^n"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

$D = \sum_i f^{(n)-1}(\zeta_n^i)$ とおく. D は極大退化しているファイバーなので, $H_1(D, \mathbb{Q})$ は Hodge 構造が $(0, 0)$ しかない. よって

$$0 \longrightarrow H_2(X^{(n)})/H_2(D) \longrightarrow H_2(X^{(n)}, D) \longrightarrow H_1(D) \longrightarrow 0 \qquad (\spadesuit)$$

定理 (Asakura, Otsubo のプレプリントの主定理)

完全列 ($\spadesuit$) の extension data は ${}_3F_2$ で書ける (詳細は略).

こうして 1 を満たす (X, D) が得られた.

2 の議論を実行するためには, $H_2(X^{(n)})$ のホッジサイクル ($\Leftrightarrow$ 代数的サイクル) のなす部分を決定すればよい.

$\sigma \in \mathrm{Aut}(X^{(n)})$ を $\sigma(s) = \zeta_n s$ によって与えられる自己同型とする. このとき $K[\sigma]$ が $H_2(X^{(n)})$, $H_2(D)$ に作用する.

$$K[\sigma] = K_1 \times \cdots \times K_m, \quad (K_i \text{ は体})$$

より, 次の分解を得る.

$$H_2(X^{(n)})/H_2(D) = H_1 \times \cdots \times H_m, \quad (H_i \text{ は } K_i \text{ 加群}).$$

補題

ある緩い条件の下, $\dim_{K_i} H_i = 1$.

(証明) コホモロジーの次元の計算に関する演習問題. QED.

系

- $H_i^{2,0} = 0 \Longrightarrow H_i$ が Hodge サイクルで生成される.
- $H_i^{2,0} \neq 0 \Longrightarrow H_i$ は Hodge サイクルを含まない.

(証明) $\dim_{K_i} H_i^B \cap H^{1,1} = 0$ or 1 であり, それは $H_i^{2,0} \neq 0$ or $H_i^{2,0} = 0$ で決まるから. QED.

主定理の条件は次のように対応している.

$$
\begin{array}{ccc}
\text{上の補題の “ある緩い条件”} & \longleftrightarrow & q, a, b, q-a, q-b, q-a-b \notin \mathbb{Z} \\
H_i^{2,0} = 0 & \longleftrightarrow & \text{条件 } (\clubsuit)
\end{array}
$$

以上の結果をすべてまとめて, 主定理の証明が終わる.

フェルマー曲面による方法

S を $u^N + v^N - 1 = w^N$ で定義されるフェルマー曲面とする. D を $(u^N - 1)(v^N - 1) = 0$ で定義される有理曲線 (直線) の和とする.

$\Longrightarrow (S, D)$ は前と同じ議論が実行可能 (1,2 にあるような条件を満たす).

フェルマー曲面の場合には, extension data に超幾何 ${}_3F_2$ が現れることは, ファイブレーションの場合よりもずっと簡単に証明できる.

補題

$a, b, q \in \mathbb{Q}$ s.t. $a, b, q, a-q, b-q, a+b-q \notin \mathbb{Z}$ とする.

$$\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq u, v \leq 1,\ 1 \leq u^N + v^N\}$$

とおくと

$$B(a,b)_3F_2\left(\begin{matrix} a, b, q \\ a+b, q+1 \end{matrix}; 1\right) = N^2 q \int_\Delta u^{N(a-q)-1} v^{N(b-q)-1} w^{Nq-N} du dv.$$

$u^{N(a-q)-1} v^{N(b-q)-1} w^{Nq-N} du dv \in H^2_{\mathrm{dR}}(S)$ であり, $\Delta \in H_2(S, D; \mathbb{Z})$ であることから, 右辺は extension data に相当する.

(証明) 積分公式

$$
\begin{aligned}
&{}_3F_2\left(\begin{matrix}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\\ \beta_1,\beta_2\end{matrix};z\right)\\
&=C\int_0^1\int_0^1 t_1^{\alpha_1-1}t_2^{\alpha_2-1}(1-t_1)^{\beta_1-\alpha_1-1}(1-t_2)^{\beta_2-\alpha_2-1}(1-zt_1t_2)^{-\alpha_3}dt_1dt_2
\end{aligned}
$$

$$
C=\frac{\Gamma(\beta_1)\Gamma(\beta_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\beta_1-\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\beta_2-\alpha_2)}
$$

において $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=(a,q,b,a+b,q+1)$ とし, 変数変換 $x=t_1$, $y=(1-t_1)/(1-t_1t_2)$ を行うと

$$
B(a,b)_3F_2\left(\begin{matrix}a,b,q\\ a+b,q+1\end{matrix};z\right)=qz^{-q}\int_D x^{a-q-1}y^{b-q-1}(x+y-1)^{q-1}dxdy
$$

最後に $u^N=x$, $v^N=y$, $w^N=x+y-1$ とおいて変数変換する. (証明終)

2 の議論の実行には, 前と同様に, ホッジサイクルのなす部分空間

$$H_2(S)/H_2(D) \cap H^{1,1}$$

の決定が必要である. これは塩田・青木・寺杣らによって, 完全に出来ている.

以上によって, 主定理の (別) 証明が終わる.

[補足 (というより蛇足)]. フェルマー曲面は, 大坪・朝倉のプレプリントのファイブレーションの構造をもつ. $S : u^N + v^N - 1 = w^N$ に対し

$$x = u^{-1}, \quad y = v^{-1}, \quad z = wu^{-1}v^{-1}$$

とおくと

$$u^N + v^N - 1 = w^N \quad \Longleftrightarrow \quad (x^N - 1)(y^N - 1) = 1 - z^N.$$

よって

$$f : X \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad f^{-1}(t) : (x^N - 1)(y^N - 1) = 1 - t$$

なるファイブレーションとすると, これはプレプリントの条件を満たす. f を底変換して得られる $f^{(N)}$ がフェルマー曲面である.

${}_3F_2$ は関数として log で書けるか？

定理

$a, b, q \in \mathbb{Q}$ が, $a, b, q, a-q, b-q, q-a-b \notin \mathbb{Z}$ および (♣) を満たし, かつ $a+b \in \mathbb{Z}$ のとき

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix} 1, 1, q \\ a, b \end{matrix} ; x \right) \in \overline{\mathbb{Q}(x)} + \overline{\mathbb{Q}(x)} \log \overline{\mathbb{Q}(x)}^{\times}. $$

つまり代数関数の log の有限和である.

証明の方針. $f : X \to \mathbb{P}^1$ というファイブレーションを

$$ \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^1, \quad s \longmapsto t = a - s^n, \quad a \neq 0, 1 $$

による底変換したもの $f_a : X_a^{(n)} \to \mathbb{P}^1$ を考える. こうして a でパラメーター付けられたファイブレーションの族ができ, 前の議論を一般化することで関数版を証明する.

なお, "$a+b \in \mathbb{Z}$" という条件は, まだ外せてない.

具体例

$e_i = e_i(x)$ を３次方程式 $2T^3 - 3T^2 + x^{-1}$ の根とする. 具体的に書くと

$$e_1(x) = \frac{1}{2} + x^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{8} + \frac{1}{4}\sqrt{1-x} \right)^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}} \left(-\frac{1}{4} + \frac{x}{8} - \frac{1}{4}\sqrt{1-x} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$e_2(x)$ は第２項に $e^{-2\pi i/3}$, 第３項に $e^{2\pi i/3}$ をかけたもの. $e_3(x)$ は第２項に $e^{2\pi i/3}$, 第３項に $e^{-2\pi i/3}$ をかけたもの.

$$p_{\pm}(x) := \left(\frac{1 \pm \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad q_j(x) := \frac{1 - \sqrt{3x} \cdot e_j(x)}{1 + \sqrt{3x} \cdot e_j(x)},$$

このとき

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,1,\frac{1}{2}\\ \frac{7}{6},\frac{11}{6}\end{matrix};x\right)=\frac{5\sqrt{3}}{36}x^{-\frac{1}{2}}\Big[(p_+(x)+p_-(x))\log\frac{q_1(x)}{q_2(x)}
$$
$$
+(e^{\frac{\pi i}{3}}p_+(x)+e^{-\frac{\pi i}{3}}p_-(x))\log\frac{q_2(x)}{q_3(x)}\Big], \quad (1)
$$

$$
{}_3F_2\left(\begin{matrix}1,1,\frac{3}{2}\\ \frac{7}{6},\frac{11}{6}\end{matrix};x\right)=-\frac{5\sqrt{3}}{54}x^{-\frac{3}{2}}\Big[\frac{x}{\sqrt{1-x}}(p_+(x)-p_-(x))\log\frac{q_1(x)}{q_2(x)}
$$
$$
+\frac{x}{\sqrt{1-x}}(e^{\frac{\pi i}{3}}p_+(x)-e^{-\frac{\pi i}{3}}p_-(x))\log\frac{q_2(x)}{q_3(x)}\Big]. \quad (2)
$$

(1) の両辺は $x = 1$ で収束する. よって

$$ {}_3F_2\left(\begin{matrix}1, 1, \frac{1}{2} \\ \frac{7}{6}, \frac{11}{6}\end{matrix}; 1\right) = \frac{5\sqrt{3}}{6}\log(2+\sqrt{3}), $$

Dixon の公式より

$$ 2\pi\ {}_3F_2\left(\begin{matrix}\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2} \\ 1, \frac{3}{2}\end{matrix}; 1\right) = 3\sqrt{3}\log(2+\sqrt{3}). $$

これは Watson の公式として既出である.

問題

超幾何関数と L 関数 (e.g. Hecke L 関数) の関係を研究せよ.

例えば, 次の論文では, 楕円曲線の L 関数の特殊値を超幾何関数 ${}_3F_2$ の特殊値で書いている.

Rogers and Zudlin, *From L-series of elliptic curves to Mahler measures.* Compositio Math. 148 (2012), 385–414.

このような研究がたくさん出てくれば, 超幾何と数論幾何の交流がもっと深まるだろう.

ご静聴ありがとうございました！