

代数学C レポート問題

- 出題日: 1月20日(月)
- 提出期限: 2月03日(月) 16:30
- 提出先: レポートボックス No. 8

10 体 E から E への体としての同型写像全体のなす群を $\text{Aut}(E)$ とし, G, H をその部分群とする. また $\sigma \in \text{Aut}(E)$ に対し σ による $x \in E$ の像を x^σ で表す.

(1) 群 G により定まる体 E の部分集合

$$E_G = \{x \in E \mid x^\sigma = x \text{ for } \forall \sigma \in G\}$$

は E の部分体であることを示せ.

(2) $G \supset H$ ならば $E_G \subset E_H$ を示せ.

11 E を体 F のガロア拡大体とし, そのガロア群を G とする. E と F の中間体 K に対して,

$$\mathcal{G}(K) = \{\sigma \in G \mid \alpha^\sigma = \alpha \text{ for } \forall \alpha \in K\}$$

とする, ここで α^σ は $\sigma \in G$ による α の像を表す.

(1) $\mathcal{G}(K)$ は G の部分群になることを示せ.

(2) E と F の中間体 K_1, K_2 が $K_1 \supset K_2$ ならば $\mathcal{G}(K_1) \subset \mathcal{G}(K_2)$ を示せ.

12 (1) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ は \mathbb{Q} のガロア拡大か理由を述べて判定せよ.

(2) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1})$ は \mathbb{Q} のガロア拡大か理由を述べて判定せよ.

(3) $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, \sqrt{-1})$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ のガロア拡大か理由を述べて判定せよ.

13 複素数係数 2 変数有理関数体 $E = \mathbb{C}(x, y)$ の自己同型写像 σ_1, σ_2 を

$$\sigma_1 : f(x, y) \mapsto f^{\sigma_1}(x, y) = f(y, x), \quad \sigma_2 : f(x, y) \mapsto f^{\sigma_2}(x, y) = f(-x, -y)$$

で定め, これらで生成される群を G とする. また, 群 G に対する E の不変部分体を

$$E_G = \{f(x, y) \in E \mid f^\sigma(x, y) = f(x, y) \text{ for } \forall \sigma \in G\}$$

とする.

(1) 群 G の位数を求め, G の自明でない部分群の個数を求めよ.

(2) E は E_G のガロア拡大体であることを示し, 拡大次数 $[E : E_G]$ を求めよ,

(3) 体 E と E_G の自明でない中間体 K の個数を求めよ. これらすべての中間体 K は E_G のガロア拡大体であることを示せ.