

代数学C レポート問題

- 出題日: 12月09日(月)
- 提出期限: 12月23日(月) 16:30
- 提出先: レポートボックス No. 8

- [6] (1) 標数 p の有限体 F は, その元の個数は p^m であることを示せ.
(2) F を元の個数が n の有限体とする. 多項式環 $F[x]$ の既約な2次多項式のうち, 2次の係数が1となるものの個数を求めよ.
(3) 有限体は, 代数閉体でないことを示せ.

- [7] 体 F の多項式環 $F[x]$ から $F[x]$ への写像

$$\frac{d}{dx} : F[x] \ni f(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i \mapsto f'(x) = \sum_{i=0}^m i a_i x^{i-1}$$

が以下をみたすことを示せ.

- (1) $\frac{d}{dx}(b \cdot f(x) + c \cdot g(x)) = b \cdot f'(x) + c \cdot g'(x) \quad (b, c \in F).$
(2) $\frac{d}{dx}(f(x) \cdot g(x)) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$
(3) $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$

- [8] $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ を $\mathbb{Q}, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ を含む最小の体とする. この体は, 単純拡大体 $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ と同型になることを示せ.

- [9] 体 $\mathbb{F}_2$ を係数とする2変数有理式体 $\mathbb{F}_2(x, y)$ を F とし, F 係数多項式 $f(z) = z^2 - x \in F[z]$ に対する方程式 $f(z) = 0$ の根 $\sqrt{x}$ を ξ , $g(z) = z^2 - y \in F[z]$ に対する方程式 $g(z) = 0$ の根 $\sqrt{y}$ を η とする. 体 F に ξ, η を添加した拡大体 $F(\xi, \eta)$ を E とする.

- (1) E を F 上の線形空間とみなしたときの基底を与えよ.
(2) E の任意の元は, F 上2次以下の代数的な元であることを示せ.
(3) E は F の単純拡大体にはならないことを示せ.