代数学Cレポート問題

- 出題日: 11 月 11 日 (月)
- 提出期限: 11 月 25 日 (月) 16:30
- 提出先: レポートボックス No. 8

$\boxed{1}$ R を単位元 1 を有する可換環とし, I を R の極大イデアルとする. 剰余環 R/I は, 体であることを示せ.

$\boxed{2}$ 体 $\mathbb{F}_2$ を部分体として含み, $\mathbb{F}_2$ 上の線形空間として 2 次元となっている体を環 $\mathbb{Z}[\omega] = \{m + n\omega \mid m, n \in \mathbb{Z},\ \omega = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\} \subset \mathbb{C}$ のあるイデアルに関する剰余環として構成せよ.

$\boxed{3}$ $f : R \to R'$ を整域 R, R' 間の同型写像とし, $\varphi : R \to F$, $\varphi' : R' \to F'$ を整域から商体への単射準同型とする.

$$\tilde{f} : F \ni \varphi(a)\varphi(b)^{-1} \mapsto \varphi'(f(a))\varphi'(f(b))^{-1} \in F' \quad ({}^{\forall}a, {}^{\forall}b (\neq 0) \in R)$$

が体としての同型写像であることを示せ.

$\boxed{4}$ 体 E は 体 F の拡大体で K はそれらの中間体とする. $\{e_1, \ldots, e_m\}$ が E の K 上の基底で, $\{k_1, \ldots, k_n\}$ が K の F 上の基底ならば,

$$\{e_i k_j\}_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = \{e_1 k_1, \ldots, e_1 k_n, \cdots, \cdots, \cdots, e_m k_1, \cdots, e_m k_n\}$$

は, E の F 上の基底となることを示せ.

$\boxed{5}$ E が F の素数次拡大ならば, E と F の中間体は E, F 以外に存在しないことを示せ.