

プリンタで出力して読むことをおすすめします．

## ワイルドな領域変形と偏微分方程式 (III) ギンツブルグ・ランダウ方程式

神保秀一，北大大学院理学研究科数学

### §1. 物理的背景

本稿では，ギンツブルグ・ランダウ (Ginzburg-Landau または GL) 方程式の，解の性質について存在や安定性や領域の影響を考える．まず物理的背景から述べることにする．GL 方程式あるいは GL 汎関数は (低温) 超伝導現象の状態を記述するためのモデルとして導入された．物質の中の電子の状態に対応して全体のエネルギーを対応させ (GL 汎関数)，そのエネルギー値を極小化する状態をもって実現可能な状態であると説明するのが GL 理論である．そしてこの際に現れる変分方程式がギンツブルグ・ランダウ (GL) 方程式と呼ばれる．超伝導現象で著しい特徴のひとつは永久電流である．これは外部から駆動力がなくても，減衰することなく (半) 永久的に電流が存続する状態である．一般に物体に電流があってもそのままでは電気抵抗によって電流が減衰してしまうが，(極低温の) ある状況でそれに反する状態が可能であることが大発見であった (20世紀初頭) といわれている．50年後ギンツブルグとランダウ (GL) によってモデル化され方程式が与えられた ([2])．この方程式は物理的な外部状況に対応するいくつかのパラメータをもつ．パラメータの範囲全部にわたって現象が GL 方程式で忠実に記述されているかどうか，かならずしも保証の限りではないが，良いモデルであることは長年の物理学の研究で十分認識されている．数学的には特定の汎関数の変分構造をよく理解できればよい，とうことで物質科学の問題を数学の問題に還元する GL 理論は明解であるが，しかし，方程式自体は複雑で現在の数学の手法をもってしてもなかなか明解な理解には到達していない．数学者がこの問題の面白さに本格的に気づいたのは70年代後半である．偏微分方程式として解の研究が始まり，90年以降非常に活発な研究が続くことになった．また，実験や数値計算などで得られる現象が豊かな様相を呈することも，偏微分方程式の立場からの研究をすすめる駆動力になっている．本稿では磁場の効果を無視し単純化された GL 方程式の安定解 (物理的には永久電流の状態に対応) の存在と領域の影響にまつわる数学的な状況 (のある部分) を主に説明する．

### §2. GL 汎関数, GL 方程式

$\Omega \subset \mathbb{R}^3$  は滑らかな境界をもつ有界領域とする． $(\Phi, A)$  を変数として次の GL 汎関数を考える．

$$(2.1) \quad \mathcal{H}_\lambda(\Phi, A) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |(\nabla - iA)\Phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Phi|^2)^2 \right) dx + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} |\operatorname{rot} A|^2 dx \quad ([1] \text{ 参照})$$

$\Phi$  は  $\Omega$  上の複素数値関数， $A$  は  $\mathbb{R}^3$  上の  $\mathbb{R}^3$  値関数である． $\lambda > 0$  はパラメータである．課題はこの汎関数の変分構造をできるだけ詳しく知ることである．変分構造を特徴付ける一番重要な要素は停留点 (Critical Point) の分布やその様子であるが，それは  $\mathcal{H}_\lambda$  の変分方程式として得られる GL 方程式の解に他ならない．このようにして次の GL 方程式が得られる．

$$(2.2) \quad \begin{cases} (\nabla - iA)^2 \Phi + \lambda (1 - |\Phi|^2) \Phi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \nu} - i \langle A \cdot \nu \rangle \Phi = 0 & \text{on } \partial \Omega, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} A + (i(\overline{\Phi} \nabla \Phi - \Phi \nabla \overline{\Phi})/2 + |\Phi|^2 A) \Lambda_\Omega = \mathbf{0} & \text{in } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{rot} A \rightarrow \mathbf{0} & \text{for } |x| \rightarrow \infty. \end{cases}$$

ここで  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  は  $\mathbb{R}^3$  の標準内積， $\Lambda_\Omega$  は  $\Omega$  の特性関数．すなわち  $\Lambda_\Omega(x) = 1$  ( $x \in \Omega$ )， $\Lambda_\Omega(x) = 0$  ( $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ )．物理的には  $\Phi$  は  $\Omega$  上の複素数値関数で電流の状態を表し， $A$  は  $\mathbb{R}^3$  上のベクトル値関数で磁場のベクトルポテンシャルである．問題はこの方程式の解の存在やその性質を調べる

ことである．その目的のためにも上の複雑なモデル (2.1), (2.2) の代用品として  $A$  の効果をすべて無視して  $A \equiv 0$  とし得られる方程式も扱うことにする．これもしばしば GL 汎関数, および GL 方程式と呼ばれるものである．本文では主にこの方程式の解を扱う．

$$(2.3) \quad \mathcal{I}_\lambda(\Psi) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla \Psi|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Psi|^2)^2 \right) dx$$

$$(2.4) \quad \begin{cases} \Delta \Psi + \lambda (1 - |\Psi|^2) \Psi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial \Omega. \end{cases}$$

(2.2) のかわりに (2.4) を考える理由は次の通りである．(2.1) の汎関数の停留点  $(\Phi, A)$  を考える際に  $\Phi$  と  $A$  の役割を意識する． $\Phi$  を任意に固定して  $A$  を変数としてみると  $\mathcal{H}_\lambda$  は下に凸の関数である, よって停留点を考えるうえで  $\Phi$  に対して  $A$  の取り方は一意的である．よって変分構造を考える上で全体の汎関数を  $\Phi$  が主役であるというおおまかな観測が生まれる．そこで, 汎関数が  $\Phi$  にどのように依存するかをみるために  $A$  を無視して得られる (2.3) を調べるのが課題となる． $\lambda > 0$  は大きい値を取るパラメータである．この考察の背景には外部磁場  $H$  がかかっていない場合は (2.3), (2.4) で元々の問題を忠実に置きかえられる (少なくとも定性的には) という (楽観的な?) 考えがある．一部物理の文献でもそれを認めて先を進める例がある．

### §3. $S^1$ 上の GL 方程式

GL 方程式についてのイメージをもつため, 簡単な場合で (2.4) の解について調べる．1次元の空間である  $\mathbb{R}$  の周期的な解 (あるいは同じことであるが  $S^1$ ) を考える．単純なエネルギー汎関数

$$(3.1) \quad \mathcal{J}_\lambda(\Psi) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 + \frac{\lambda}{4} (1 - |\Psi|^2)^2 \right) dx$$

を考える．但し,  $\Psi$  は  $\mathbb{R}$  上の複素数値関数で  $2\pi$  周期をもつものとする．この変分方程式として以下を得る．

$$(3.2) \quad \frac{d^2 \Psi}{dx^2} + \lambda (1 - |\Psi|^2) \Psi = 0 \quad (x \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}).$$

簡単に得られる解として

$$(3.3) \quad \Psi(x) = \Phi_\lambda(x) = (1 - m^2/\lambda)^{1/2} e^{imx+c} \quad (x \in S^1)$$

があげられる．ただし,  $m$  は整数である,  $c$  は実数である．パラメータ  $\lambda$  は  $\lambda \geq m^2$  でとれば上の関数は有効である．

注意. 実は一番簡単な解は  $\Phi \equiv 0$  であるが, これは電子がすべて常伝導状態にある解に対応．これはパラメータに無関係にいつも解である．

$\Psi_\lambda$  は変分方程式の解であるが, それはエネルギー汎関数  $\mathcal{J}_\lambda$  の値をここにおいて停留させることを意味する (停留点)．すなわち,  $\Psi_\lambda$  において  $\mathcal{J}_\lambda$  のどの方向にも微係数 (変分) が消えることである．式であらわすとそれは次の通りである．

$$(3.4) \quad \mathcal{J}^{(1)}(\Psi_\lambda, \phi) = \frac{d}{d\epsilon} \mathcal{J}_\lambda(\Psi_\lambda + \epsilon\phi)|_{\epsilon=0} = 0 \quad (\forall \phi : \text{任意の関数}).$$

これが成立することが変分方程式に等価になっていた．

[解の安定性]

$\Psi_\lambda$  の安定性を考える．すなわちこのまわりで  $\mathcal{J}_\lambda$  の増減を問題にする．安定な停留点とは局所的に最小点になっていることとする．このことは 2 階変分

$$\mathcal{J}^{(2)}(\Psi_\lambda, \phi) = \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{J}_\lambda(\Psi_\lambda + \epsilon\phi) \Big|_{\epsilon=0}$$

の様子をみることによって知ることができる．これは具体的な計算で次のような表現になる．

命題 1 (第 2 変分公式).

$$(3.5) \quad \mathcal{J}^{(2)}(\Psi_\lambda, \phi) = \int_0^{2\pi} \left( \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{\lambda}{4} (2(|\Psi|^2 - 1)|\phi|^2 + (\overline{\Psi}\phi + \overline{\phi}\Psi)^2) \right) dx$$

さて摂動の方向  $\phi$  によって  $\mathcal{J}^{(2)}$  の符号がどうなるかと見てみよう．まず  $\phi$  をフーリエ級数展開して上式に代入してみる．

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} p_k e^{ikx} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ここで  $p_k \in \mathbb{C}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) である．

$$\int_0^{2\pi} e^{i\ell x} e^{-ikx} = \begin{cases} 2\pi & (\ell = k) \\ 0 & (\ell \neq k) \end{cases}$$

などを用いて計算すると多少式は長くなるが第 2 変分がさらに具体的に表示できる．

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^{(2)}(\Psi_\lambda, \phi) &= \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} k^2 |p_k|^2 - \pi m^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} |p_k|^2 + \frac{\pi}{2} (\lambda - m^2) \left( \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2|p_k|^2 + \sum_{k_1 + k_2 = 2m} (p_{k_1} p_{k_2} + \overline{p}_{k_1} \overline{p}_{k_2}) \right) \\ &= \pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (k^2 + \lambda - 2m^2) |p_k|^2 + \frac{\pi}{2} (\lambda - m^2) \sum_{k_1 + k_2 = 2m} (p_{k_1} p_{k_2} + \overline{p}_{k_1} \overline{p}_{k_2}) \\ &= \pi (\lambda - m^2) |p_m|^2 + \frac{\pi}{2} (\lambda - m^2) (p_m^2 + \overline{p}_m^2) \\ &\quad + \pi \sum_{s=1}^{\infty} \{ (\lambda + 2ms + s^2 - m^2) |p_{m+s}|^2 + (\lambda - 2ms + s^2 - m^2) |p_{m-s}|^2 \\ &\quad \quad + (\lambda - m^2) (p_{m+s} p_{m-s} + \overline{p}_{m+s} \overline{p}_{m-s}) \} \end{aligned}$$

このように  $\mathcal{J}^{(2)}(\Psi_\lambda, \phi)$  は  $\{p_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$  の関数で表示できたが，よく見ると複素変数  $p_m, p_{m \pm s}$  ( $s \geq 1$ ) をもつ 2 次形式の無限和の形になっていることに気づく．これをそれぞれ行列の固有値問題に書き直すため  $p_{m+\ell} = a_\ell + b_\ell i$  ( $a_\ell, b_\ell \in \mathbb{R}$ ) と表して．

$$\mathcal{J}^{(2)} = \mathcal{J}_0^{(2)}(a_0, b_0) + \sum_{s=1}^{\infty} \mathcal{J}_s^{(2)}(a_s, b_s, a_{-s}, b_{-s})$$

$$\mathcal{J}_0^{(2)}(a_0, b_0) = 2\pi (\lambda - m^2) a_0^2$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_s^{(2)}(a_s, b_s, a_{-s}, b_{-s}) &= \pi \{ (\lambda + 2ms + s^2 - m^2) (a_s^2 + b_s^2) \\ &\quad + (\lambda - 2ms + s^2 - m^2) (a_{-s}^2 + b_{-s}^2) + 2(\lambda - m^2) (a_s a_{-s} - b_s b_{-s}) \} \\ &= (a_s, a_{-s}) \begin{pmatrix} \lambda + 2ms + s^2 - m^2 & \lambda - m^2 \\ \lambda - m^2 & \lambda - 2ms + s^2 - m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_s \\ a_{-s} \end{pmatrix} \\ &\quad + (b_s, b_{-s}) \begin{pmatrix} \lambda + 2ms + s^2 - m^2 & -(\lambda - m^2) \\ -(\lambda - m^2) & \lambda - 2ms + s^2 - m^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_s \\ b_{-s} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

よって  $\mathcal{J}^{(2)}(\Psi_\lambda, \phi)$  が  $\phi$  によらず非負定値になるためには  $\lambda \geq m^2$  の他に, すべての  $s = 1, 2, 3, \dots$  にたいして, 行列

$$\begin{pmatrix} \lambda + 2ms + s^2 - m^2 & \lambda - m^2 \\ \lambda - m^2 & \lambda - 2ms + s^2 - m^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda + 2ms + s^2 - m^2 & -(\lambda - m^2) \\ -(\lambda - m^2) & \lambda - 2ms + s^2 - m^2 \end{pmatrix}$$

が負の固有値を持たないことが条件である (行列の対称性から固有値はすべて実). 各  $s$  について 2 次方程式の根の符号の条件を計算する. これにより条件  $\lambda \geq 3m^2 - (1/2)$  となる. この安定性解析により (3.2) の解  $\Psi_\lambda$  について次を得た.

命題 2.  $\Psi_\lambda$  は  $\lambda \geq 3m^2 - (1/2)$  にたいして安定である (局所的にエネルギー最小な状態).

最初に発見された超伝導現象は, 細い円環状のなかに発生した永久電流の現象であった. 上で扱った  $S^1$  上の方程式の安定解はちょうどその単純モデルと見なされる. 実際には物質は 1 次元ではなく細い 3 次元の物体であるからあくまで近似にすぎないが, 許される電流がとびとびの強度のものだけにかぎられることも上の議論で解が自然数パラメータ  $m$  もつことに符号している (cf. [3], [5]). さてもうすこし現実感を持たせるため以下では一般領域を扱う. ただし, 定理の証明は短い紙面ではできない (詳しくは文献表を参照).

#### §4. 一般領域での GL 方程式

本節では一般領域  $\Omega$  にたいして 2 節であげた  $\mathcal{I}_\lambda$  を考察する. 上で記述したようにこれは外から磁場をかけることなく, 物体に永久電流の状態が存在するか否かを規定する (単純化された) モデルとみなすことができる. さてこれの停留点について考える. 前節では円環においてパラメータ  $\lambda$  を大きくとれば, 安定な状態が存在し得た. 一般の領域でも素朴な発想としては  $\Omega$  が単純な形状だと単純な安定解しか許されず, 複雑だと安定解が豊かに存在する状況になる, と考えられる. これは, 楕円型方程式や反応拡散方程式などパターン形成の研究の例からも予想されることである. よってこの場合でも物理的には円環状あるいはドーナツ状, あるいは, 多重ドーナツ状であれば同様の永久電流に相当する安定な状態があるのが自然である. すなわち物体のなかに環流できるためのトポロジカルな自明でないサイクル (輪体) があれば良いからである. 数学的にはこれは単連結でないということに同値である. 一方, 逆に全く単純な球体のような領域では永久電流の状態が存続できるであろうか? このような相反する状況において 2 つの異なる解の状況が生じる.

注意.  $c$  を実数定数として定数関数  $\Psi(x) = e^{ic}$  をおくとこれは  $\mathcal{I}_\lambda$  の最小値 0 を与えている. すなわちこれは安定な停留点である. 物理的には電子がすべて超伝導状態にあるがマクロな流れはない状態である. これは自明な安定解と呼ばれる.

以下では  $\mathcal{I}_\lambda$  のモデルについてこの観点からの研究の結果を述べよう.

##### [単純領域と非存在]

定義. ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  の集合  $\Omega$  が凸であるとは, 任意の 2 点  $x, y \in \Omega$  と  $0 \leq t \leq 1$  に対して  $(1-t)x + ty \in \Omega$  となることである. たとえば球体, 楕円体等が代表例. 境界がなめらかな場合は外向き単位法線ベクトルに関する第 2 基本形式が境界の各点で非正定値であることと同値となる (詳しくは微分幾何学の本を参照). このような単純な領域には永久電流が存続できないことが言える (モデル  $\mathcal{I}_\lambda$  においては).

定理 3.  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を滑らかな境界をもつ有界な凸領域であると仮定する. このとき,  $\mathcal{I}_\lambda$  自明でない安定な停留点を持たない.

注意. これはこの様な単純領域では外部駆動力がない限り永久電流の状態が生じないことを意味する. 詳しい解析は [3] を参照.

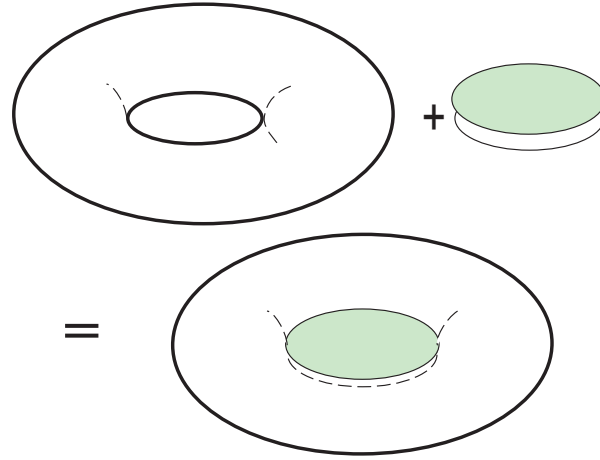


FIGURE 1. ドーナツ領域と薄いパンケーキ領域の和 (可縮)

[複雑領域と存在]

定義. ユークリッド空間の集合  $\Omega$  が単連結であるとは  $\Omega$  に含まれる任意の閉曲線  $S^1$  から  $\Omega$  の中への連続写像が連続的に 1 点を値にもつ定値写像に変形できること.

定理 4. 空間次元  $n$  は 2 または 3 と仮定する. また,  $\Omega$  は単連結でないを仮定する. このとき, ある定数  $\lambda_0$  があって,  $\lambda \geq \lambda_0$  にたいして  $\mathcal{I}_\lambda$  は自明でない安定停留点  $\Psi_\lambda$  をもつ.

注意. 詳しい解析は [6], [7] を参照.

定理 3 に戻る. 定理の仮定について領域の凸性を弱められるだろうか. 単純な領域ということでは, たとえば単連結や可縮などの条件を与えたらどうだろうか. 実は  $n = 3$  の場合は必ずしも定理 3 の結論が成立しないことがわかる. これを説明するため領域変形に対する安定解の存在を考慮してみる. 定理 4 の  $\Omega$  に対し, 次の条件をみたす領域の族  $\Omega(\zeta) \subset \mathbb{R}^3$  を考える ( $\zeta > 0$ ).

[領域の特異的変形]

$$(i) \Omega(\zeta_1) \supset \Omega(\zeta_2) \supset \Omega \quad (\zeta_1 \geq \zeta_2 > 0).$$

$$(ii) \lim_{\zeta \rightarrow 0} \text{Vol}(Q(\zeta)) = 0. \text{ 但し, } Q(\zeta) = \Omega(\zeta) \setminus \Omega.$$

(i) は単調減少性, (ii) は差集合の体積がゼロに収束することを要求しているだけで, 位相的には乱暴な変形が許される. それにも関わらず定理 4 で得られた安定解は領域  $\Omega(\zeta)$  上に摂動できる, ということが次の定理である.

定理 5. 上の (i) (ii) で与えた  $\Omega(\zeta)$  上で GL 汎関数  $\mathcal{I}_\lambda$  の停留点 (すなわち方程式 (2.4) の解) を考える. このとき, 前定理で得られた  $\Omega$  上の安定停留点  $\Psi_\lambda$  にある意味で漸近する  $\Omega(\zeta)$  上の安定停留点  $\Psi_{\lambda, \zeta}$  が存在する. ここでの漸近の意味は任意の  $\eta > 0$  に対して

$$(4.1) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \sup_{x \in R(\eta)} |\Psi_{\lambda, \zeta}(x) - \Psi_\lambda(x)| = 0, \quad R(\eta) := \{x \in \Omega \mid \sup_{\zeta > 0} \text{dist}(x, Q(\zeta)) \geq \eta\}.$$

注意. (4.1) より  $\Psi_{\lambda, \zeta}$  が非自明な永久電流となっていることも示している. 詳しい解析は [4] を参照.

元の話に戻る. さて  $\Omega$  として  $\mathbb{R}^3$  の通常のソリッドトーラス (ドーナツ領域) をとる (Figure 1 参照). それにたいして定理の通り非自明な安定解  $\Psi_\lambda$  を作る. このソリッドトーラスの穴部分に薄いパンケーキ状の薄膜  $Q(\zeta)$  を張り付けて塞ぐことによって可縮な領域  $\Omega(\zeta)$  を構成するとこれが

上の定理の条件をみたす．こうして可縮な領域に非自明な安定解が (4.1) を満たすように構成できる．よって安定解の存在を決めるものが位相的な条件だけでないことがわかる．

この方法は  $n = 2$  の場合は適用できない．例えば 2 次元において可縮な領域の場合に定理の結論が成立するのかどうか現在でも未解決である．

一般領域での磁場の効果をもつ GL 方程式についても同様の研究がある．これらは参考文献 [3-10] を参照．

### References

- [1] Q. Du, M. Gunzberger and J. Peterson, Analysis and approximation of the Ginzburg Landau model of superconductivity, *SIAM Review* **34** (1992), 54-81.
- [2] V. Ginzburg and L. Landau, On the theory of Superconductivity, *Zh. Éksper. Teoret Fiz.* **20** (1950), 1064-1082.
- [3] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of non-constant steady state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions, *Nonl. Anal. TMA.* **22** (1994), 753-770.
- [4] S. Jimbo and Y. Morita, Stable solutions with zeros to the Ginzburg-Landau equation with Neumann boundary condition, *J. Differential Equations* **128** (1996), 596-613.
- [5] S. Jimbo and Y. Morita, Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a rotational domain, *SIAM. J. Math. Anal.* **27** (1996), 1360-1385.
- [6] S. Jimbo and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation with magnetic effect: Non-simply-connected domains, *J. Math. Soc. Japan* **50** (1998), 663-684.
- [7] S. Jimbo, Y. Morita and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation and stable steady state solutions in a non-trivial domain, *Comm. Partial Differential Equations* **20** (1995), 2093-2112.
- [8] S. Jimbo and P. Sternberg, Non-existence of permanent currents in convex planar samples, *SIAM J. Math. Anal.* **33** (2002), 1379-1392.
- [9] 神保, 森田, ギンツブルグ・ランダウ方程式の解の構造, 論説, 数学, **56** (2004), 18-32.
- [10] J. Rubinstein and P. Sternberg, Homotopy classification of minimizers of the Ginzburg-Landau energy and the existence of permanent currents, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996), 257-263.