

プリンタで出力してから読むことをおすすめします。

## ワイルドな領域変形と偏微分方程式 (II) 非線型楕円型方程式と安定解の存在

神保秀一，北大大学院理学研究科数学専攻

### §1. 半線型放物型方程式，安定定常解

本稿では前編 (I) に引き続き楕円型作用素 (とくにラプラシアン) が関わる偏微分方程式の解の領域依存性という観点からの研究の話題を書きます。ここではノイマン (あるいは断熱) 境界条件をもつ半線型放物型方程式を考える。  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  を滑らかな境界  $\partial\Omega$  をもつ有界領域とする。実数値関数  $u = u(t, x)$  ( $x \in \Omega, t > 0$ ) を未知関数と方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \lambda u - u^3 & (t > 0, x \in \Omega) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & (t > 0, x \in \partial\Omega) \\ u(0, x) = u_0(x) \end{cases}$$

を考える。  $\lambda$  は実パラメータである。  $t = 0$  における適当に初期条件  $u(0, x) = u_0(x)$  を与えれば解  $u = u(t, x)$  が大域的に存在することが知られている。この方程式は例えば生物の個体数 (密度) の変化を表す単純なモデルの1つである。  $u$  は時刻  $t$ , 地点  $x \in \Omega$  における生物の個体数密度である。  $\Delta$  は拡散効果を表し，非線型項は生物が増殖減少する度合いを表わしている。  $u$  が小さいと出生による増加，  $u$  が大きすぎると抑制が効いて減少作用が働くことがモデル化されている。生物現象以外でも物理や化学において相転移の様子を表すなど，同様な方程式が出現する。また，反応拡散方程式などと総称されるもののひとつとみなすこともできる。ノイマン境界条件は生物や物質が境界から外に出入りしないことを表す。ここで，ラプラシアンは

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

であったことを思い出しておこう。時間  $t \rightarrow \infty$  のときに解  $u(t, x)$  はどうなるであろうか考える。それを補助するため，次のエネルギー汎関数  $\mathcal{H}_\lambda(\Phi)$  を定義する。

$$\mathcal{H}_\lambda(\Phi) = \int_\Omega \left( \frac{1}{2} |\nabla \Phi|^2 - \frac{\lambda}{2} \Phi^2 + \frac{1}{4} \Phi^4 \right) dx$$

$\Phi = \Phi(x)$  は  $x$  の関数である。(1.1) の解  $u = u(t, x)$  を代入して  $t$  で微分することによって時間変化をみる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_\lambda(u(t, \cdot)) &= \int_\Omega \left( \nabla u \nabla \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) - (\lambda u - u^3) \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{\partial u}{\partial t} dS - \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t} (\Delta u + \lambda u - u^3) dx = - \int_\Omega \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

これにより  $u = u(t, x)$  は時間の経過とともにエネルギーが減少する．そして時間  $t \rightarrow \infty$  のときに解  $u(t, x)$  は収束して極限  $v = v(x)$  をもち，これは実は定常解である．すなわち，(1.1) の  $t$  に依存しない解である．また，この  $v$  は汎関数  $\mathcal{H}_\lambda$  の停留する点にもなる．停留する点とは汎関数をグラフで考えたとき傾いていない点のことである．エネルギーは時間とともに単調非増加なのでなるべく低いところにやがて落ち着くわけである．しかし， $u$  の極限の行き先は  $\mathcal{H}_\lambda$  の最小値や極小値を与える点とは限らず，峠の鞍点のような所であることもある．汎関数の停留点は (1.1) の  $t$  に依存しない解，すなわち次の方程式の解にちょうどなっている．

$$(1.2) \quad \Delta v + \lambda v - v^3 = 0 \quad (x \in \Omega), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial\Omega).$$

ここで再び  $v$  が実数値関数であることに注意しておく．エネルギーの停留点  $v$  が (1.2) をみたすことは次のように示すことができる． $\Omega$  上の任意の滑らかな関数  $\phi$  をとり  $\mathcal{H}_\lambda(v + s\phi)$  を考える．ここで  $s$  は実数とする．これを  $s$  を動かしてみると  $s = 0$  のところで値が停留することになるので

$$0 = \frac{d}{ds} \mathcal{H}_\lambda(v + s\phi)|_{s=0}$$

が成り立つはずだが，右辺は実際に計算できて

$$\text{右辺} = \int_{\Omega} (\nabla v \nabla \phi - \lambda v \phi + v^3 \phi) dx$$

となるが，部分積分すれば結局条件は

$$0 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu} \phi dS - \int_{\Omega} \phi (\Delta v + \lambda v - v^3) dx$$

となるが  $\phi$  の任意性により (1.2) の方程式と境界条件を得る．

(1.2) の解 (定常解) やその構造の解析が (1.1) の解の長時間の解の挙動をわかることに結びつく．たとえば，(1.2) の解にたいして安定性という性質がわかることは大いなる情報をもたらす．

[安定性] (1.2) の解  $v$  が安定であるとは，大雑把に言うと  $v$  の近くに初期値  $u_0$  を任意に取り，それを初期値として (1.1) の解  $u(t, x)$  を考えたとき  $t \geq 0$  がずっと変化しても  $u$  が  $v$  の近くに留まっていることである．数式を用いて表現すると『任意の  $\epsilon > 0$  にたいし，ある  $\delta > 0$  があって， $\|u_0 - v\| < \delta$  なる任意の  $u_0$  を初期値とする (1.1) の解  $u = u(t, x)$  が  $\|u(t, x) - v(x)\| < \epsilon$  ( $t \geq 0$ ) をみたす』である．一方， $v$  が安定でないとき，不安定という．ここで  $\|\cdot\|$  を考えている関数空間のノルムである．

安定性をエネルギー汎関数  $\mathcal{H}_\lambda$  に関連させて述べると， $v$  が安定とは汎関数が  $v$  で極小値を取っていること，と同等であることを示すことができる．安定性の判定はどうすれば良いのであろうか．それを与えてくれるのが次の線型化固有値問題である．

[線型化固有値問題] (1.2) の解  $v$  にたいし

$$(1.3) \quad \begin{cases} \Delta \phi + (\lambda - 3v^2)\phi + \mu \phi = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

この固有値  $\{\mu_k(v)\}_{k=1}^\infty$  (線型化固有値という) とおく．固有値とは (1.3) が自明でない  $\phi$  をもつような  $\mu$  の値である．もちろん  $v$  に依存し  $\infty$  にのみ集積する可算個の実数列になることがいえ

るので上のように表した．また重複度を込めて単調に番号付けされている．この固有値(たち)の性質からおおよそその安定，不安定が従う．

命題．もし  $\rho_1(v) > 0$  なら  $v$  は安定， $\rho_1(v) < 0$  なら  $v$  は不安定である．

$\rho_1(v) = 0$  のときは一般には安定性については何とも言えない．

命題．もし  $\{\mu_k(v)\}_{k=1}^{\infty} \not\equiv 0$  ならばある意味で  $v$  は非退化で  $\lambda$  を少し変化させたときに解  $v$  は連続に変化する．すなわち，パラメータに関する連続的な依存性が成立する(これは陰関数定理のようなもの)．

以上のことより定常問題 (1.2) の解について線型化固有値問題が解析できたら，(1.1) の解のダイナミクスまで理解が及ぶことになる．

さて話を戻して (1.2) について理解を深めよう．簡単にわかることは  $\lambda \leq 0$  なら解は定数関数解  $v \equiv 0$  のみである．これは方程式に  $v$  をかけて積分して得られる等式

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^2 + v^4) dx = \lambda \int_{\Omega} v^2 dx$$

から示される．

また，さらにすぐわかることは  $\lambda > 0$  の範囲で3つの定数関数  $v(x) \equiv 0$ ， $v(x) \equiv \pm\sqrt{\lambda}$  は (1.2) の解になることである．

さてこの3つの定数関数  $0$ ， $\pm\sqrt{\lambda}$  以外の解は存在するであろうか．実際もし  $\lambda > 0$  が小さいならばこの3つに限られることを示すことが可能である．

定理． $0 < \lambda < \rho_2/2$  ならば解は  $v \equiv 0$ ， $v \equiv \pm\sqrt{\lambda}$  の3つの定数関数のみである．

(証)  $f(v) = \lambda v - v^3$  とおく

(Step 1)  $|v(x)| \leq \sqrt{\lambda}$  を示す．方程式の両辺に  $v^{2m+1}$  ( $m \in \mathbb{N}$ ) をかけ積分すると

$$-(2m+1) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 v^{2m} dx + \int_{\Omega} v^{2m+1} (\lambda v - v^3) dx = 0$$

となるから

$$\int_{\Omega} v^{2m+4} dx \leq \lambda \int_{\Omega} v^{2m+2} dx$$

ヘルダーの不等式を  $2/(2m+4) + (2m+2)/(2m+4) = 1$  にたいし用いれば

$$\begin{aligned} \text{右辺} &\leq \left( \int_{\Omega} v(x)^{2m+4} dx \right)^{(2m+2)/(2m+4)} \left( \int_{\Omega} 1^{(2m+4)/2} dx \right)^{2/(2m+4)} \\ &= |\Omega|^{2/(2m+4)} \left( \int_{\Omega} v(x)^{2m+4} dx \right)^{(2m+2)/(2m+4)} \end{aligned}$$

まとめて

$$\left( \int_{\Omega} v^{2m+4} dx \right)^{2/(2m+4)} \leq \lambda |\Omega|^{1/(m+2)}$$

となるが  $m \rightarrow \infty$  として  $\sup_{\Omega} |v(x)|^2 \leq \lambda$  をえる．これより結論が従う．

(Step 2) 次に方程式より

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx = \int_{\Omega} f(v) v dx$$

であったが,  $\bar{v} = \int_{\Omega} v(x) dx / |\Omega|$  とおいておくと

$$\int_{\Omega} (v(x) - \bar{v}) dx = 0, \quad \int_{\Omega} f(v(x)) dx = 0,$$

などから

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(v - \bar{v})|^2 dx &= \int_{\Omega} (f(v) - f(\bar{v})) (v - \bar{v}) dx, \\ &\leq \sup_{\Omega} |f'(v(x))| \int_{\Omega} |v(x) - \bar{v}|^2 dx, \end{aligned}$$

が得られる. ポアンカレ不等式より

$$\rho_2 \int_{\Omega} (\phi(x) - \bar{\phi})^2 dx \leq \int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx \quad (\phi \in H^1(\Omega))$$

であるから. ここで  $f'(v) = \lambda v - 3v^2$  であるが  $|v(x)| \leq \sqrt{\lambda}$  より  $\sup |f'(v(x))| \leq 2\lambda$  となり, もし  $\lambda < \rho_2/2$  なら  $v(x) \equiv \bar{v}$  となり, 定数関数である.  $\square$

$\Delta$  は拡散の働きをするので状態を平坦にする効果がある. 解をあまり複雑にすることを防ぐ, 一方, 非線型項は反対に解を多様にする効果をもち安定なパターンを生じさせる原動力になる.  $\lambda > 0$  が大きくなると拡散の効果が相対的に弱まり複雑な解が生じる. このように  $\lambda$  の変化により解の構造が質的に変化するわけであるが, このようなものを分岐あるいは分岐現象という. また変化する境目の所を分岐点という.  $\lambda < 0$  のとき解が  $v \equiv 0$  しかなく,  $\lambda > 0$  で解が3つ以上あるのでこれも分岐と言って良い. この境目のところ  $(\lambda, v) = (0, 0)$  が分岐点という.

$\lambda$  がだんだん大きくなることにより解が分岐していく様を具体的に領域の場合にどうなるか後の節で述べることにしよう (cf. 図 0).

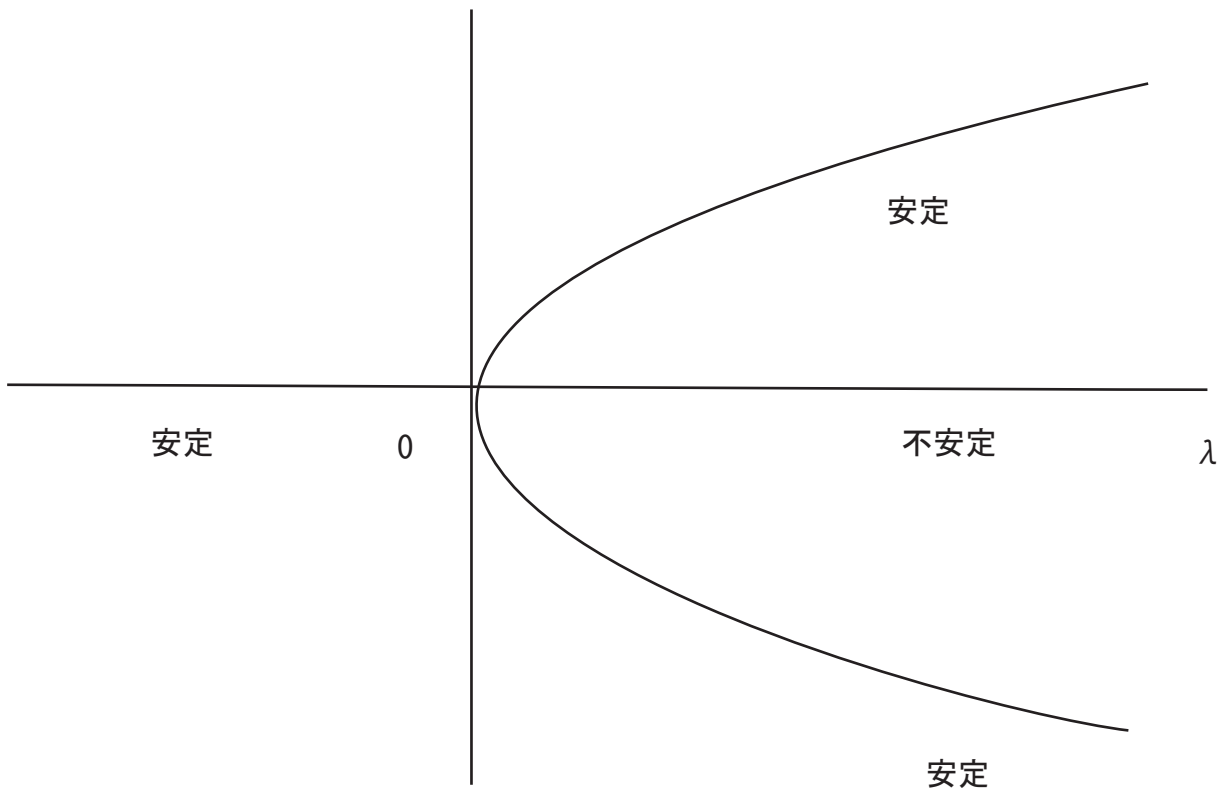


図0:分岐図,  $\lambda$ によって解の構造が変わる

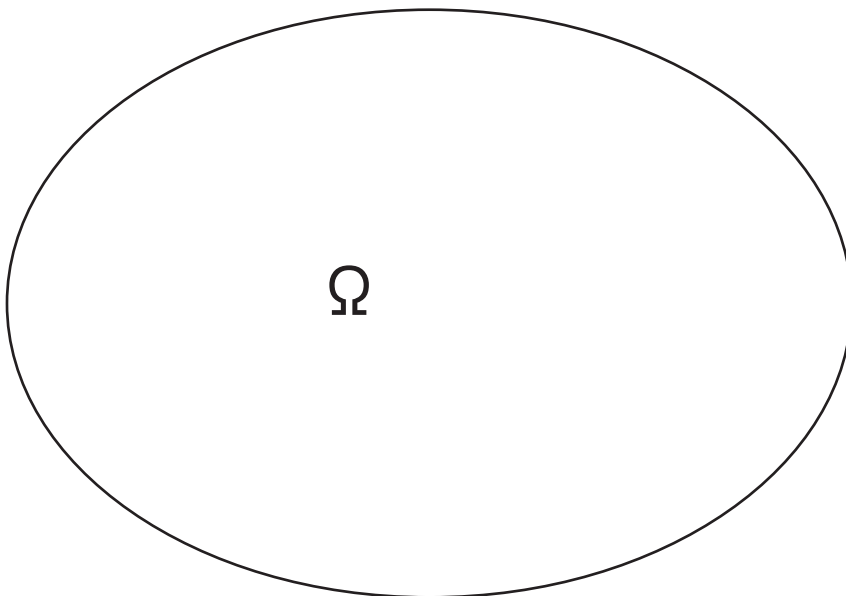


図1:典型的な凸領域

## §2. 凸領域と安定解の非存在

領域が単純な形ならあまり複雑な解が安定になれない，それは拡散効果が良く効き非線型項の働きを押さえてしまうことが示せる．単純な領域のひとつとして凸領域がある．ここで，凸領域とは，条件『その中の任意の2点に対しそれを両端とする線分もその領域に包含される』をみたす領域．代表例は円板，楕円板がある (cf. 図1)．次のような結果を紹介しよう．

定理 (Matano [7]). 領域  $\Omega$  が凸領域であるとする (1.2) の任意の非定数解は不安定である．

(1.1) で定数関数は高々3つだが，あとで見るようにそのうち安定なものは  $\pm\sqrt{\lambda}$  だけである．このような単純領域における非自明の非存在の結果は他の方程式においても成立する．

(i) Competition-Diffusion equation : Kishimoto-Weinberger [6] 参照

(ii) Ginzburg-Landau equation : Jimbo-Morita [4] 参照

(定理の証明の概略) 非定数解  $v$  が存在すると仮定する．不安定性を示すため第2変分を考える．もちろん第一変分は消えていることに注意．元の汎関数の2階変分は

$$J_\lambda(v, \phi) \equiv \frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{H}_\lambda(v + \epsilon\phi)|_{\epsilon=0} = \int_\Omega (|\nabla\phi|^2 + (-\lambda + 3v^2)\phi^2) dx$$

である．ここでキーとなるアイデア (cf. Matano [7]) はつぎのような量  $\sum_{k=1}^n J_\lambda(v, \partial v/\partial x_k)$  を計算することです．これは計算すればかなりわかりやすい表現になって

$$a = \sum_{k=1}^n J_\lambda(v, \frac{\partial v}{\partial x_k}) = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial\nu} |\nabla v|^2 dS$$

となる．さてこの式の右辺の符号をみる．まず次の補題を用意する．

補題.  $w$  を  $\bar{\Omega}$  上の  $C^2$  級の関数で  $\partial\Omega$  でノイマン境界条件を満たすと仮定する．このとき，つぎの等式が成立

$$\frac{\partial}{\partial\nu} |\nabla w|^2 = -2B(\nabla w, \nabla w) \quad (x \in \partial\Omega).$$

ここで  $\partial\Omega$  の接空間上の2形式  $B$  は  $-\nu$  を基底に取った第2基本形式である．すなわち， $\partial\Omega$  上の点での接ベクトル  $\xi_1, \xi_2$  にたいし  $B(\xi_1, \xi_2) = \langle \nabla_{\xi_1}(\nu) \cdot \xi_2 \rangle$  と定まる．また， $\nabla w$  は境界上で接ベクトルとなることに注意 (cf. [4]) ．

条件として凸領域のときは  $B$  は非負定値となるので  $a \leq 0$  となる． $a < 0$  ならどれかの  $J_\lambda(v, \partial v/\partial x_k)$  ( $1 \leq k \leq n$ ) が負になるので，第2変分が負の方向があり停留点は不安定となる．さて  $v$  が安定だとすると  $J$  が非負定値となり，すべての  $k$  にたいし  $J_\lambda(v, \partial v/\partial x_k) = 0$  となる．よって  $J_\lambda(v, \cdot)$  を汎関数とみて  $\partial v/\partial x_k$  が最小値となる．よって斉次の変分方程式が導かれる．また，そこから自然境界条件が出る．すなわち， $\partial v/\partial x_k$  自体がノイマン境界条件を満たす．一方， $\nabla v$  が曲率が消えていない境界上で0も成立しなければならないから，過剰決定条件となる．よって  $\partial v/\partial x_k$  に関する斉次偏微分方程式にたいしてローカルなコーシー問題の解の一意性より  $\partial v/\partial x_k$  はゼロでなければならない．  $\square$

注意 この結果は特定の方程式 (1.2) 以外でも成立する．Jimbo - Morita [4] 参照．

## §3. 非定数安定解の存在

前節では凸ぐらいに単純なら非線型項が頑張ってもパターン形成が生じないことを見た．では逆に非定数安定解はどのようなとき存在するであろうか．ここでは極端に凸から正反対の状況を考

えよう．実は領域が分裂していくつかの互いに交わらない  $D_1, D_2, \dots, D_N$  にわかれていくような変形において安定解が生じ得る．まず領域変形を設定しよう．

(A)  $D_1, D_2, \dots, D_N \subset \mathbb{R}^n$  を滑らかな境界をもつ有界領域で任意の2つは互いに交わらないとする．

(B)  $\Omega(\zeta) \subset \mathbb{R}^n$  ( $\zeta > 0$ ) を滑らかな境界をもつ有界領域であるとし，次の条件を満たすとする．

$$(*) \quad D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_N \subset \Omega(\zeta_1) \subset \Omega(\zeta_2) \quad (0 < \forall \zeta_1 < \forall \zeta_2),$$

$$(**) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \text{Vol} \left( \Omega(\zeta) \setminus \bigcup_{k=1}^N D_k \right) = 0.$$

注：これは前編の記事 (I) で扱った (B) 型領域にほぼ同じなので参照のこと．図2 参照．

(C)  $\mathbb{R}$  上の滑らかな実数値関数  $f$  があるとし，

$$\Gamma = \{\xi \in \mathbb{R} \mid f(\xi) = 0, \quad f'(\xi) < 0\} \neq \emptyset$$

が成立するとする．

上の状況で方程式

$$(3.1) \quad \Delta v + f(v) = 0 \quad (x \in \Omega(\zeta)), \quad \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad (x \in \partial\Omega(\zeta))$$

を考える．

定理 (Jimbo [2]). 上記 (A),(B),(C) を仮定する．任意の  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N \in \Gamma$  を与える．ある  $\zeta_0$  があり  $0 < \zeta \leq \zeta_0$  なる任意の  $\zeta$  にたいする (3.1) は安定解  $v_\zeta$  をもち

$$(3.2) \quad \lim_{\zeta \rightarrow 0} \|v_\zeta - \mathbf{a}_k\|_{L^2(D_k)} = 0 \quad (1 \leq k \leq N)$$

が成立する．

注：この定理はより一般のエネルギー構造をもつ方程式にも拡張されいくつかの応用がある．

# B型の領域変形 $\Omega(\xi)$

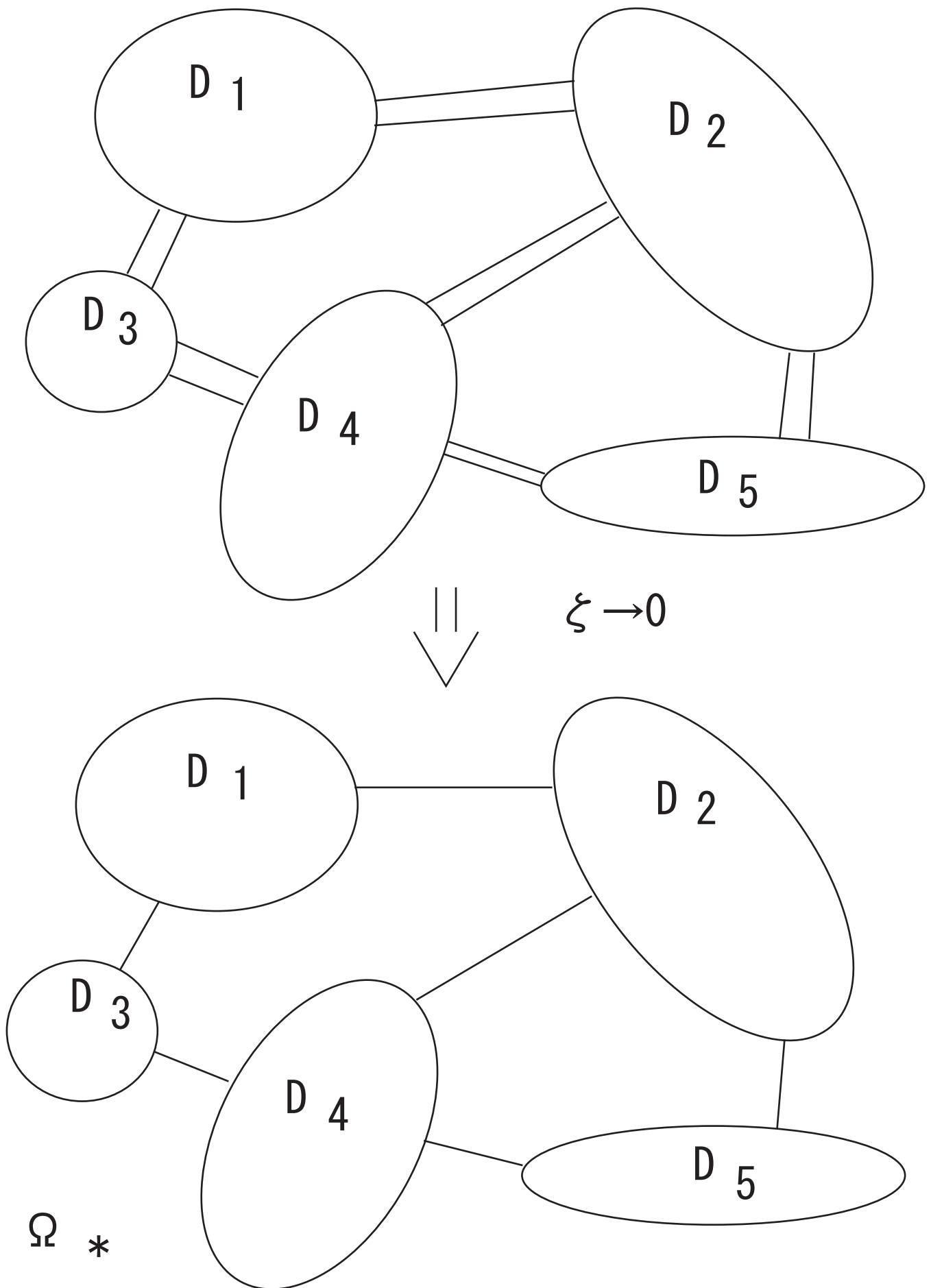


図2



#### §4. 分岐問題

本節ではパラメータ  $\lambda > 0$  に関して解の構造はどう変化するかを見てみたい．Vegas [10] ではダンベル型領域において解の分岐現象を解析した．この仕事は非線型楕円型方程式において詳しい(非自明な)分岐構造を初めて調べたものとして画期的なものであった．まずその仕事を振り返り，つぎにもう少し難しい領域の場合に適用してみる．(1.2) をもう少し具体的に調べて見る．まず，定数関数解について線型化固有値問題を  $\lambda > 0$  の範囲で見よう． $v_0(x) \equiv 0$ ,  $v_1(x) \equiv \sqrt{\lambda}$ ,  $v_2(x) \equiv -\sqrt{\lambda}$  とおく．まず  $v_0 = 0$  については (1.3) は

$$(4.1) \quad \Delta\phi + \lambda\phi + \mu\phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

となる．これより線型化固有値は  $\mu_k(v_0) = \rho_k - \lambda$  ( $k \geq 1$ )． $\rho_1 = 0$  であるから  $v_0$  は  $\lambda < 0$  では安定， $\lambda > 0$  では不安定となる． $v_1(x) = \sqrt{\lambda}$  についてはこれを (1.3) に代入して固有値問題は

$$\Delta\phi - 2\lambda\phi + \mu\phi = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega$$

となり  $\mu_k(v_1) = \rho_k + 2\lambda \geq 0$  ( $k \geq 1$ ) となる．解が存在する範囲  $\lambda > 0$  では安定となる．さて  $v_0 = 0$  は分岐パラメータ  $\lambda$  によらずつねに解であるが，上の結果と第1節の命題によると  $\lambda = \rho_k$  ( $k \geq 1$ ) となる点以外では分岐しない．前の考察ですでにわかっていることは  $\lambda = \rho_1 = 0$  で  $v_0$  が  $v_0, v_1, v_2$  の3つに分かれたことである (cf. 分岐図 0)．

次の  $\lambda = \rho_2$  での分岐の様子を調べてみよう．ただし，一般には領域に極度に依存し詳しいことはわからないので前節であつかったような分裂型の領域 (B) タイプのケースを考える．

[ダンベル型領域 (左右対称タイプ)]

ダンベル型領域  $\Omega(\zeta) = D_1 \cup D_2 \cup Q(\zeta)$  において左右対称のケースを扱う．この場合  $\zeta \rightarrow 0$  にたいしてまん中のハンドル部分が収縮して線分に退化する (cf. 図 3)．

$\Omega(\zeta)$  上のラプラシアン固有値  $\{\rho_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty}$  は  $\rho_1(\zeta) = 0$ ,  $\rho_2(\zeta) \rightarrow 0$  を満たし，残りの固有値は一定の  $\delta > 0$  以下にはなれない (前編 (I) 参照)．固有関数としては漸近的に

$$(4.2) \quad \Phi_{1,\zeta}(x) \sim \begin{cases} 1/|D|^{1/2} & \text{in } D_1, \\ 1/|D|^{1/2} & \text{in } D_2, \end{cases} \quad \Phi_{2,\zeta}(x) \sim \begin{cases} 1/|D|^{1/2} & \text{in } D_1, \\ -1/|D|^{1/2} & \text{in } D_2, \end{cases}$$

となるように取れる．ここで  $D = D_1 \cup D_2$  である．以下厳密な証明はせず非常にラフな計算により  $\rho_2(\zeta) > 0$  から解が分岐している様子をおおまかに調べる．パラメータ  $\lambda$  が  $\rho_2(\zeta)$  付近にいるときの解が  $v$  が

$$(4.3) \quad v(x) = \xi_1\Phi_{1,\zeta}(x) + \xi_2\Phi_{2,\zeta}(x)$$

というふうに第1, 2固有関数の線型結合でかかっているとす．ただし,  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$  とす．さてこれを方程式に代入して

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta(\xi_1\Phi_{1,\zeta} + \xi_2\Phi_{2,\zeta}) + \lambda(\xi_1\Phi_{1,\zeta} + \xi_2\Phi_{2,\zeta}) - (\xi_1\Phi_{1,\zeta} + \xi_2\Phi_{2,\zeta})^3 \\ &= -\rho_2(\zeta)\xi_2\Phi_{2,\zeta} + \lambda(\xi_1\Phi_{1,\zeta} + \xi_2\Phi_{2,\zeta}) - (\xi_1\Phi_{1,\zeta} + \xi_2\Phi_{2,\zeta})^3 \end{aligned}$$

この両辺に  $\Phi_{1,\zeta}$ ,  $\Phi_{2,\zeta}$  をそれぞれかけて  $\Omega(\zeta)$  で積分することを考える．

$$\int_{\Omega(\zeta)} \Phi_{1,\zeta}^2 dx = \int_{\Omega(\zeta)} \Phi_{2,\zeta}^2 dx = 1, \quad \int_{\Omega(\zeta)} \Phi_{2,\zeta}\Phi_{1,\zeta} dx = 0.$$

と漸近式 (4.2) を用いて積分を大ざっぱに見積もると ( $Q(\zeta)$  上の積分の貢献を無視して)

$$\lambda \xi_1 - \frac{1}{2|D|} ((\xi_1 + \xi_2)^3 + (\xi_1 - \xi_2)^3) = 0$$

$$(\lambda - \rho_2(\zeta)) \xi_2 - \frac{1}{2|D|} ((\xi_1 + \xi_2)^3 - (\xi_1 - \xi_2)^3) = 0$$

を得る．ここで変数変換  $\xi_1 + \xi_2 = |D| \eta_1$ ,  $\xi_1 - \xi_2 = |D|^{1/2} \eta_2$ , によって  $\eta_1, \eta_2$  の方程式にすると

$$(4.4) \quad \begin{cases} \lambda(\eta_1 + \eta_2) - (\eta_1^3 + \eta_2^3) = 0 \\ (\lambda - \rho_2(\zeta))(\eta_1 - \eta_2) - (\eta_1^3 - \eta_2^3) = 0 \end{cases}$$

これらを具体的に解いて次の4つのケースを得る．

(1)  $\eta_1 = \eta_2 = 0$ .

(2)  $\eta_1 = \eta_2, \lambda = \eta_1^2$ .

(3)  $\eta_1 = -\eta_2, \lambda = \rho_2(\zeta) + \eta_1^2$ .

(4)  $2\eta_1\eta_2 = -\rho_2(\zeta), \lambda = (\eta_1 - \rho_2(\zeta)/2\eta_1)^2 + 3\rho_2(\zeta)/2$ .

これより  $0 \leq \lambda \leq \rho_2(\zeta)$  にたいしては (1)(2) からの3つの解,  $\lambda > \rho_2(\zeta)$  にたいしては (3)(4) からのさらなる解も併せてもっと増える．実際にはさらに  $\rho_2(\zeta) < \lambda \leq 3\rho_2(\zeta)/2, \lambda > 3\rho_2(\zeta)/2$  で異なる状況になる．実際にこれらの  $\eta_1, \eta_2$  の解からもともとの問題の解をさかのぼって理解できる．分岐図式を得る (cf. 図4) ．

図3: ダンベル型領域の領域退化

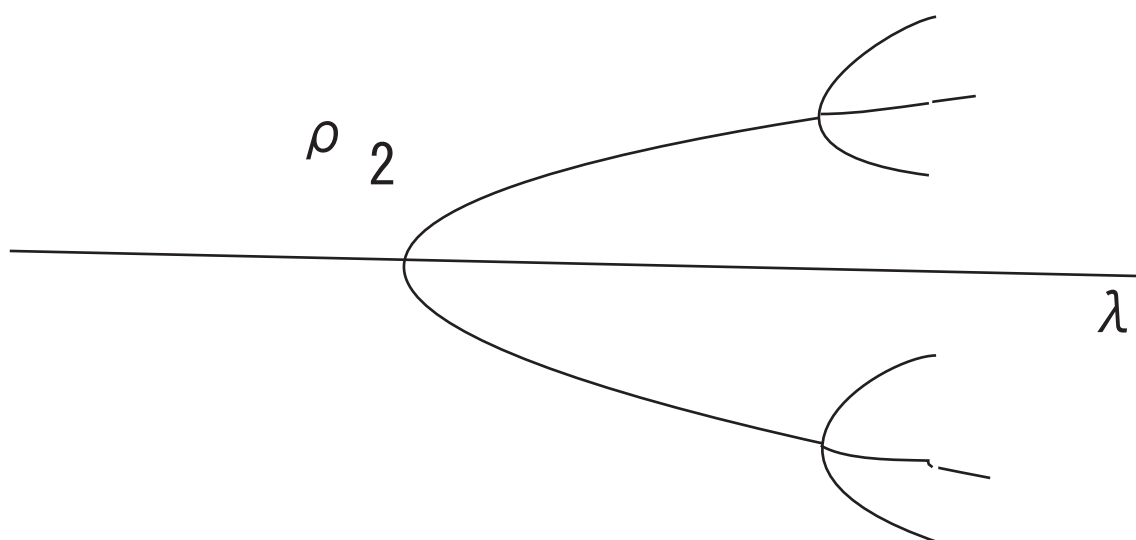
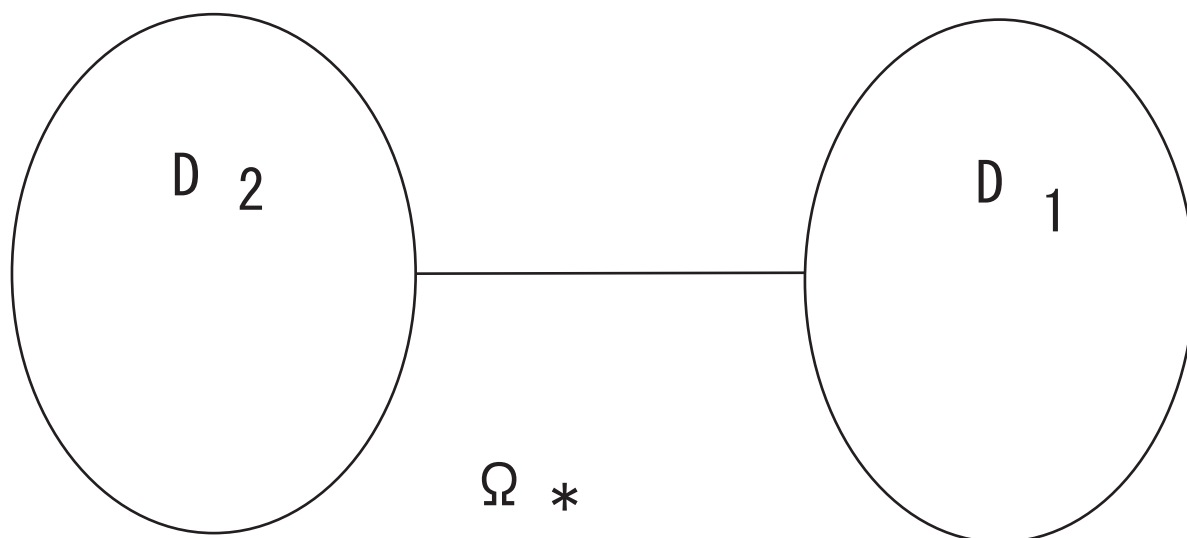
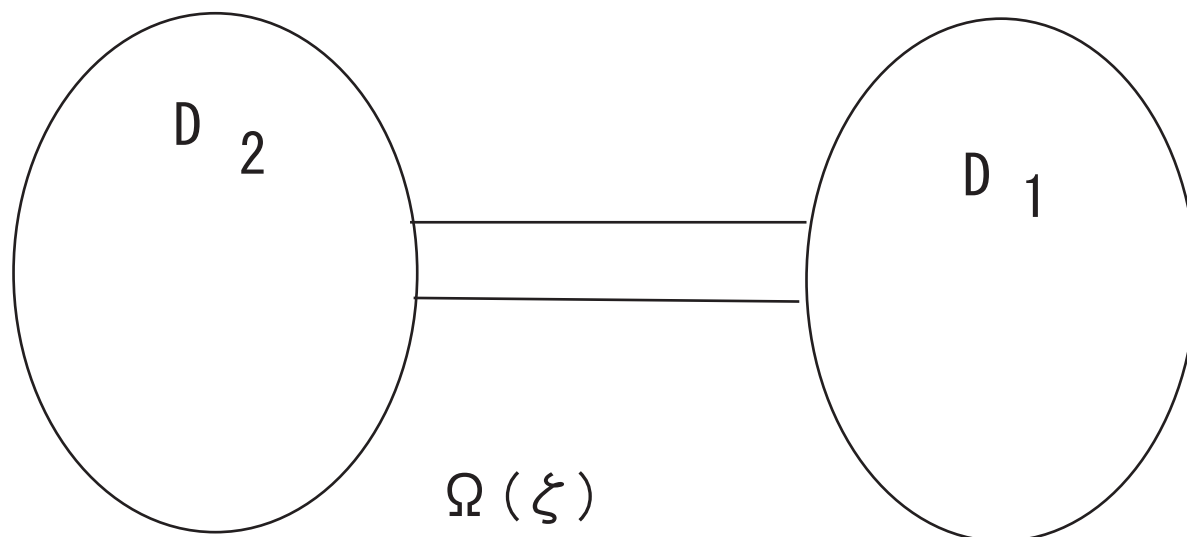


図4: 第2固有値からの分岐

以上で発見的な解析により分岐図式を得たが，Lyapunov-Schmidt の流儀に沿って厳密に正当化示される (cf. Hale-Vegas [1], Vegas [10]). すなわち  $\zeta > 0$  が小さいときに解の構造が上記のようであることが証明される．同じ方法によりもう少し複雑なケースを扱うことにする．

[4 面体群不変型]

4 面体群が等長に作用する特異摂動領域  $\Omega(\zeta) = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup Q(\zeta) \subset \mathbb{R}^n$  を考える．この  $\Omega(\zeta)$  上の固有値問題の第 4 固有値まで  $0 = \rho_1(\zeta) < \rho_2(\zeta) = \rho_3(\zeta) = \rho_4(\zeta)$  がゼロに収束する．その他は下から正の定数で押さえられる．また，第 4 固有値までに対応する固有関数は  $\Phi_{1,\zeta}, \Phi_{2,\zeta}, \Phi_{3,\zeta}, \Phi_{4,\zeta}$  は各  $D_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) 上でほぼ定数である ( $\zeta > 0$  が小さいとき)．このとき，適当な直交行列を用いて取り直すことで

$$\Phi_{1,\zeta}(x) \sim (1/|D|^{1/2}) \times \begin{cases} 1 & \text{in } D_1 \\ 1 & \text{in } D_2 \\ 1 & \text{in } D_3 \\ 1 & \text{in } D_4 \end{cases}, \quad \Phi_{2,\zeta}(x) \sim (1/|D|^{1/2}) \times \begin{cases} 1 & \text{in } D_1 \\ 1 & \text{in } D_2 \\ -1 & \text{in } D_3 \\ -1 & \text{in } D_4 \end{cases}$$

$$\Phi_{3,\zeta}(x) \sim (1/|D|^{1/2}) \times \begin{cases} 1 & \text{in } D_1 \\ -1 & \text{in } D_2 \\ 1 & \text{in } D_3 \\ -1 & \text{in } D_4 \end{cases}, \quad \Phi_{4,\zeta}(x) \sim (1/|D|^{1/2}) \times \begin{cases} 1 & \text{in } D_1 \\ -1 & \text{in } D_2 \\ -1 & \text{in } D_3 \\ 1 & \text{in } D_4 \end{cases}$$

とできる．ここで  $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$  である．前と同様に解が

$$v(x) = \xi_1 \Phi_{1,\zeta}(x) + \xi_2 \Phi_{2,\zeta}(x) + \xi_3 \Phi_{3,\zeta}(x) + \xi_4 \Phi_{4,\zeta}(x) \quad (\xi_k \in \mathbb{R})$$

と表されると仮定して，方程式に代入し

$$\Delta \left( \sum_{k=1}^4 \xi \Phi_{k,\zeta} \right) + \lambda \left( \sum_{k=1}^4 \xi \Phi_{k,\zeta} \right) - \left( \sum_{k=1}^4 \xi \Phi_{k,\zeta} \right)^3 = 0$$

を得る．これは

$$-\sum_{k=2}^4 \rho_2(\zeta) \xi \Phi_{k,\zeta} + \lambda \left( \sum_{k=1}^4 \xi \Phi_{k,\zeta} \right) - \left( \sum_{k=1}^4 \xi \Phi_{k,\zeta} \right)^3 = 0$$

となる．両辺に  $\Phi_{1,\zeta}(x), \Phi_{2,\zeta}(x), \Phi_{3,\zeta}(x), \Phi_{4,\zeta}(x)$  をかけ  $\Omega(\zeta)$  で積分し  $\zeta > 0$  の無限小の極限を考えて次の 4 つの方程式を得る．

$$\lambda \xi_1 - \frac{1}{4|D|} [(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4)^3 + (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^3 + (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)^3 + (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4)^3] = 0$$

$$(\lambda - \rho_2(\zeta)) \xi_2 - \frac{1}{4|D|} [(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4)^3 + (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^3 - (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)^3 - (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4)^3] = 0$$

$$(\lambda - \rho_2(\zeta)) \xi_3 - \frac{1}{4|D|} [(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4)^3 - (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^3 + (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)^3 - (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4)^3] = 0$$

$$(\lambda - \rho_2(\zeta))\xi_4 - \frac{1}{4|D|} [(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4)^3 - (\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 - \xi_4)^3 - (\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 - \xi_4)^3 + (\xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4)^3] = 0$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \xi_4 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{|D|}}{4} P \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

とにおいて代数方程式を変数変換．ここで  $(1/2)P$  が直交行列であることに注意．

$$\begin{aligned} \lambda(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) - (\eta_1^3 + \eta_2^3 + \eta_3^3 + \eta_4^3) &= 0 \\ (\lambda - \rho_2(\zeta))(\eta_1 + \eta_2 - \eta_3 - \eta_4) - (\eta_1^3 + \eta_2^3 - \eta_3^3 - \eta_4^3) &= 0 \\ (\lambda - \rho_2(\zeta))(\eta_1 - \eta_2 + \eta_3 - \eta_4) - (\eta_1^3 - \eta_2^3 + \eta_3^3 - \eta_4^3) &= 0 \\ (\lambda - \rho_2(\zeta))(\eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + \eta_4) - (\eta_1^3 - \eta_2^3 - \eta_3^3 + \eta_4^3) &= 0 \end{aligned}$$

これを行列を用いて表すと

$$(\lambda - \rho_2(\zeta))P\eta - \rho_2(\zeta) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \eta - P\eta = \mathbf{0}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \\ \eta_4 \end{pmatrix}$$

両辺に  $P$  の逆行列  $(1/4)P$  を左からかけて

$$(\lambda - \rho_2(\zeta))\eta + (\rho_2(\zeta)/4) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \eta - \begin{pmatrix} \eta_1^3 \\ \eta_2^3 \\ \eta_3^3 \\ \eta_4^3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

となる．よって

$$\begin{aligned} \lambda\eta_1 + (\rho_2(\zeta)/4)(-3\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) - \eta_1^3 &= 0 \\ \lambda\eta_2 + (\rho_2(\zeta)/4)(\eta_1 - 3\eta_2 + \eta_3 + \eta_4) - \eta_2^3 &= 0 \\ \lambda\eta_3 + (\rho_2(\zeta)/4)(\eta_1 + \eta_2 - 3\eta_3 + \eta_4) - \eta_3^3 &= 0 \\ \lambda\eta_4 + (\rho_2(\zeta)/4)(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 - 3\eta_4) - \eta_4^3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\eta_1 - \eta_2) \{ \lambda - \rho_2(\zeta) - (\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2) \} &= 0 \\ (\eta_2 - \eta_3) \{ \lambda - \rho_2(\zeta) - (\eta_2^2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3^2) \} &= 0 \\ (\eta_3 - \eta_4) \{ \lambda - \rho_2(\zeta) - (\eta_3^2 + \eta_3\eta_4 + \eta_4^2) \} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\eta_2 - \eta_1) \left\{ \frac{\rho_2(\zeta)}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2) \right\} &= 0 \\
(\eta_3 - \eta_2) \left\{ \frac{\rho_2(\zeta)}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_3\eta_2(\eta_3 + \eta_2) \right\} &= 0 \\
(\eta_1 - \eta_3) \left\{ \frac{\rho_2(\zeta)}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_3\eta_1(\eta_3 + \eta_1) \right\} &= 0 \\
(\eta_1 - \eta_4) \left\{ \frac{\rho_2(\zeta)}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_4\eta_1(\eta_4 + \eta_1) \right\} &= 0 \\
(\eta_2 - \eta_4) \left\{ \frac{\rho_2(\zeta)}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_4\eta_2(\eta_4 + \eta_2) \right\} &= 0 \\
(\eta_3 - \eta_4) \left\{ \frac{\rho_2(\zeta)}{4}(\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4) + \eta_4\eta_3(\eta_4 + \eta_3) \right\} &= 0
\end{aligned}$$

この代数方程式を計算して次の3つのケースを得る．これらは第2固有値から分岐する解に対応する．

(I)  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  のうち2つがゼロで残りが絶対値が等しく反対符号となっている場合である．ひとつのブランチは

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= -\eta_2, \eta_3 = \eta_4 = 0, \\
\lambda &= \rho_2(\zeta)\eta_1^2.
\end{aligned}$$

その他の枝はこれの変数を入れ替えて得られる．場合の数を数えて合計6本の枝となる．

(II)  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  のうち3つが等しい形で分岐する場合．ひとつブランチは  $\eta_2 = \eta_3 = \eta_4$ ,

$$\begin{aligned}
\lambda &= \rho_2(\zeta) + (\eta_1^2 + \eta_1\eta_2 + \eta_2^2), \\
(\rho_2(\zeta)/4)(\eta_1 + 3\eta_2) + \eta_1\eta_2(\eta_1 + \eta_2) &= 0.
\end{aligned}$$

その他の枝はこれの変数を入れ替えて得られる．場合の数を数えて合計4本の枝となる．

(III)  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$  のうち2つずつが等しい形で分岐する場合．主分岐のはじめのひとつブランチは  $\eta_1 = \eta_2, \eta_3 = \eta_4, \eta_1 + \eta_3 = 0$  である．

その他の枝はこれの変数を入れ替えて得られる．場合の数を数えて合計3本の枝となる．

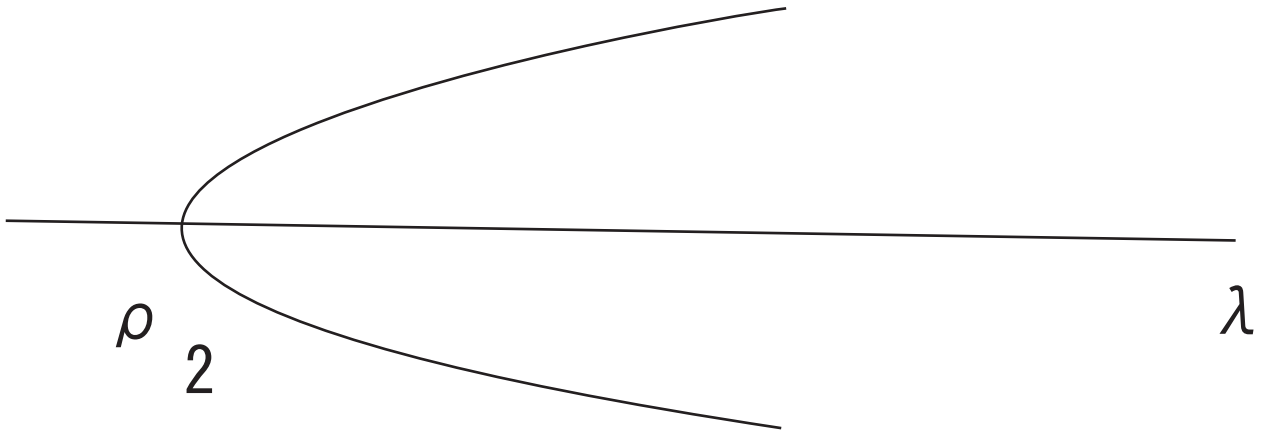
それぞれ細かい計算は省略したが 図5 にあらわれる分岐図を得る． $\lambda > 0$  が小さい範囲で1つの解  $v_0 = 0$  が枝分かれして78個の解に分かれることが計算でわかる．

以上の考察より問題は領域の対称性だけで決まるのか，幾何構造と解の分岐構造の関係がどうなっているのかという問題を提起している．

# 3つのタイプの枝

## 図5:分岐図

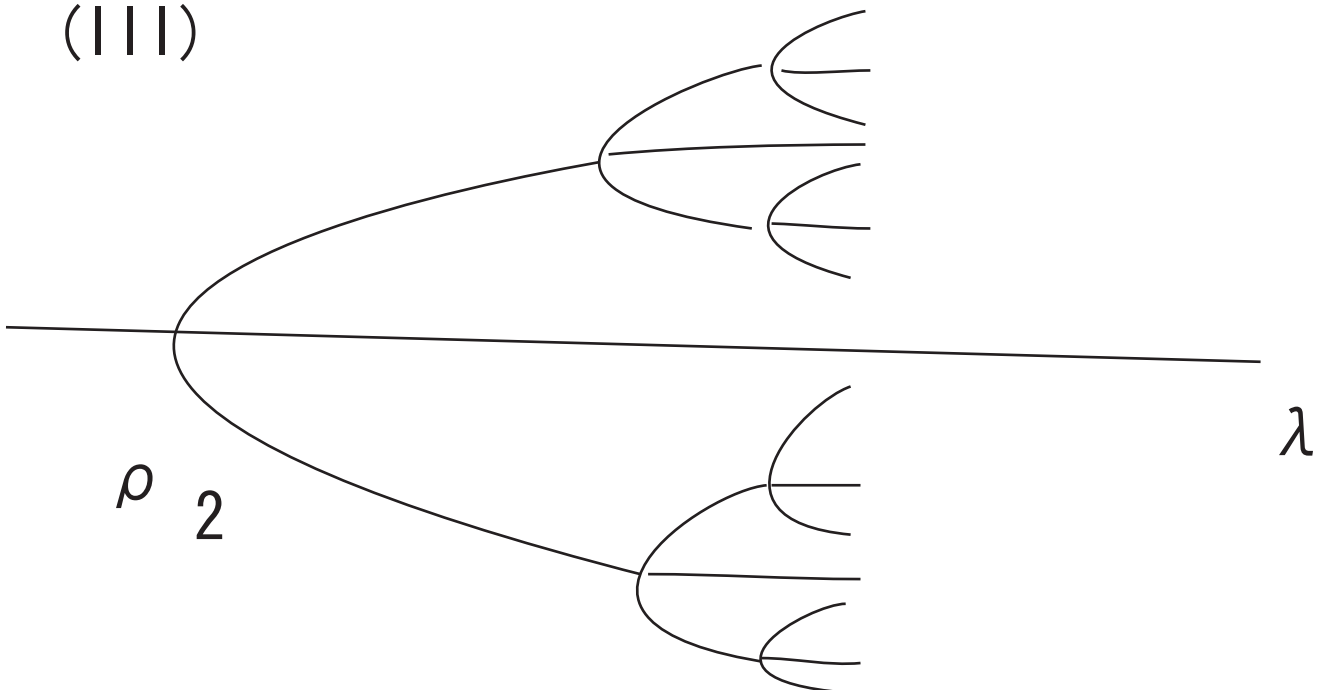
(I)



(II)



(III)



### 参考文献

- [1] J.K. Hale and J.M. Vegas, A nonlinear parabolic equation with varying domain, Arch. Rat. Mech. Anal. **86** (1984), 99-123.
- [2] S. Jimbo, Singular perturbation of domains and semilinear elliptic equation, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, **35** (1988), 25-74.
- [3] S. Jimbo, Singular perturbation of domains and the semilinear elliptic equation II, JDE **75** (1988), 264-289.
- [4] S. Jimbo and Y. Morita, Stability of steady states to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions, Nonlinear Anal. TMA, **22** (1994), 753-770.
- [5] S. Jimbo, Y. Morita and J. Zhai, Ginzburg-Landau equation and stable solutions in a non-trivial domain, Comm. PDE. **20** (1995), 2093-2112.
- [6] K. Kishimoto and H.F. Weinberger, The spatial homogeneity of stable equilibria of some reaction-diffusion systems on convex domains, JDE **58** (1985), 15-21.
- [7] H. Matano, Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equation, Publ. RIMS Kyoto Univ. **15** (1979), 401-454.
- [8] H. Matano and M. Mimura, Pattern formation in competition diffusion systems in non-convex domain, Publ. RIMS Kyoto Univ. **19** (1983), 1049-1079.
- [9] Y. Morita, Reaction-diffusion systems in nonconvex domains: invariant manifold and reduced form, JDDE **2** (1990), 69-115.
- [10] J.M. Vegas, Bifurcation caused by perturbing the domain in an elliptic equation, JDE **48** (1983), 189-226.