プリンタで出力して読むことをおすすめします．

ワイルドな領域変形と偏微分方程式 (I) スペクトルの摂動

神保秀一，北大大学院理学研究科数学専攻

§1. 導入：熱，波動の方程式とフーリエの方法

偏微分方程式の境界値問題のうちで多くの重要な例は，物理現象（波動，熱，電磁気，流体，...）の定式化によって得られます．そこでは，与えられた状況（領域条件，境界条件，外部条件）に対してどのような現象が起こるのか，それはやがてどうなるのかを理解することが目的となります．数学の役割は単純に言えば解やその構造を数学の言葉でよく理解することです．しかし，状況に依存して起こることは様々で，統一的なことは何も主張できないことが多いがの実状です．従って，方程式や境界条件の特徴や領域の幾何的な形状などのファクターを個別に良く見てその効果や依存性を詳しく研究することになります．偏微分方程式の境界値問題は，グローバルな課題で，現象が局所的には同じでも，それが起こっている空間領域全体での挙動では異なり多様に見えるので，大域的な見地からものを見る態度が必要です．また，解は大域的にきまるので，直接明示的には計算して表現できないことが多く，そのことが偏微分方程式の難しい部分であり，また，面白い部分でもあります．本稿では主に楕円型作用素が関わる偏微分方程式の解の領域依存性という観点からの研究の話題を書きます．また，それらの物理的な意味についても多少述べながら進めたいと思います．Ω はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の領域（連結開集合），$\partial\Omega$ はその境界を表します．これは滑らかであるとします.（２階）楕円型微分作用素の代表例はラプラシアン Δ ですが空間変数を $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ として x の関数 $u = u(x)$ があれば

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \quad \text{(Laplacian, ラプラス作用素)}$$

と作用します．ラプラシアンを含む偏微分方程式の典型的（かつ単純な）例として熱方程式，波動方程式から始めることにしましょう．

1.1 **熱伝導方程式**：これは物体の温度が時間空間的にどう変化するかを記述する方程式です．熱が温度の高い所から低い所に温度勾配に比例して流れる（フーリエの法則）ことを数学的に表すと熱方程式が得られます．以下扱うのは理想的な状況での場合です．t を時間変数，x を空間変数として温度分布 $u = u(t, x)$ (未知関数) がみたす方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (t > 0, x \in \Omega) \tag{1.1}$$

となります．Ω は温度分布を考えている領域です．簡単のため有界領域と仮定します．このほか初期条件（最初の状態）と次のような境界条件

$$u(t, x) = 0 \quad (t > 0,\ x \in \partial\Omega) \quad \text{(恒温境界条件)} \tag{1.2}$$

あるいは

$$(1.3)\qquad \frac{\partial u}{\partial \nu}=0 \quad (t>0,\, x\in\partial\Omega) \quad (\text{断熱境界条件})$$

（のどちらか一方）を考えます.
ここで，ν は境界での外向き単位法線ベクトルであり，(1.3) はこの方向への微分係数がゼロであることを意味します．(1.2) の恒温条件（あるいはディリクレ条件）は境界で恒等的にゼロ度，現象としては境界温度が支配的でやがて領域全体がゼロ度の状態に近づきます． (1.3) の断熱境界条件（あるいはノイマン条件）は境界から熱の出入りがない，ことを意味し Ω のもつ総熱量 $\int_\Omega u(t,x)dx$ は保存されます．また，領域全体として定温に近づきます．実際，方程式と境界条件を用いて

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega u(t,x)\,dx=\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial t}\,dx=\int_\Omega \Delta u(t,x)dx=\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,dS=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2dx=-\int_\Omega\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2dx\leqq 0$$

から $\nabla u(t,x)$ が減衰して u が空間的に平均化していく様子が確かめられます．ここで，変数分離形の解 $u(t,x)=\phi(t)\Phi(x)$ を考えてみよう．代入して

$$\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}\Phi(x)-\phi(t)\Delta\Phi(x)=0$$

だが

$$(1/\phi(t))\frac{\partial\phi(t)}{\partial t}=(1/\Phi(x))\Delta\Phi(x)$$

から左辺は t のみの関数，から右辺は x のみの関数だから両辺を $-\mu$ とおくと

$$(1.4)\qquad \Delta\Phi+\mu\Phi=0 \quad \text{in} \quad \Omega$$

Φ も (1.2) または (1.3) に対応して同様の境界条件

$$(1.5)\qquad \Phi=0 \quad (x\in\partial\Omega), \quad \text{OR} \quad \partial\Phi/\partial\nu=0 \quad (x\in\partial\Omega),$$

満たす．方程式に Φ をかけて積分してガウスの発散定理を用いて境界条件 (1.5) を考慮するといずれの場合も $\int_\Omega|\nabla\Phi|^2dx=\mu\int_\Omega|\phi|^2dx$ となり $\mu\geqq 0$ を得る．また，$\phi=\phi(t)$ については $\phi'(t)=-\mu\phi(t)$ となり $\phi(t)=e^{-\mu t}$ を得る．さて，(1.4),(1.5) にラプラス作用素の固有値問題が現れている．方程式 (1.4),(1.5) においては Φ とともに定数 $\mu\geqq 0$ も未知なるものである．詳しくは述べる余裕はないがソボレフ空間やヒルベルト空間の作用素の定理により実は (1.4)-(1.5) に非自明な Φ が存在するような μ は可算無限個で ∞ のみに集積する実数列になることが知られている (cf. [7], [24])．すなわち，$0\leqq\mu_1\leqq\mu_2\leqq\cdots\leqq\mu_m\cdots\to\infty$ となる固有値 $\{\mu_m\}_{m=1}^\infty$ がある．また，それぞれに対応する Φ を固有関数と言い Φ_m とかくが，$\{\Phi_m\}_{m=1}^\infty$ が完全系になることも一般論で知られている．すなわち，任意の関数はこれらの重ね合わせの形（無限の線型結合）に表される．以上より 1 つの解 $\phi_m(t)\Phi_m(x)=e^{-\mu_m t}\Phi_m(x)$ を得るがこれらの線形結合 $\sum_{m=1}^\infty c_m e^{-\mu_m t}\Phi_m(x)$ も解となる．よって，初期条件 $u_0(x)$ に合わせて係数 c_m を決めてもともと問題の解を表すことができるのである．以上の考察はフーリエの方法と呼ばれ 18 世紀にフーリエが針金

の温度分布の時間変化を偏微分方程式を作り，解析した際に実際に行ったものである．彼は物理現象の解明のため新しい方法を創造した人と言える．

1.2 **波動方程式**：これは太鼓の膜の振動や，音（音波）や水（水面）の波の状態の時間変化を記述する方程式である．t を時間変数，x を空間変数として未知関数 $u = u(t, x)$ にたいする波動方程式

$$(1.6) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0 \quad (t > 0, x \in \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad (t > 0, x \in \partial\Omega)$$

を考える．u は波の基準の位置からの変位を表している．ここではノイマン境界条件の場合だけを考えることにする．イメージとしては水面の波を考えるとよい．Ω がプールであるとして $u = u(t, x)$ は水面の基準の位置からの変位を表しているとすると, ちょうど時刻 t 位置 x での変位 $u(t, x)$ は関数としてこれを満たすことになる．プールの端が滑らかな壁になっていればちょうどこのノイマン条件が満たされている．この方程式も熱伝導方程式と同様にフーリエの方法を用いて解を変数分離解の重ね合わせの形

$$(1.7) \qquad u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{i\sqrt{\mu_m} t} + b_m e^{-i\sqrt{\mu_m} t})\, \Phi_m(x)$$

のように表すことができる．ただし，係数 a_m, b_m は時刻 $t = 0$ から決まる定数．特別な解として $e^{i\sqrt{\mu_m} t}\Phi_m(x)$ や $e^{-i\sqrt{\mu_m} t}\Phi_m(x)$ が存在するが, これは時間周期的 (周期 $2\pi/\sqrt{\mu_m}$, 固有振動数 $\sqrt{\mu_m}$) 変化をし，とくに固有振動解と呼ばれる．音波も空気の振動が波動として空間を伝わる現象で同じ方程式に支配されるが，固有振動解は一定の音程の音が鳴っている状態に対応する．一般の解はこれら固有振動解の重ね合わせによって (1.7) の形に表されることに注意されたい．領域から固有に定まる固有値の集合 $\{\mu_m\}_{m=1}^{\infty}$ は物理的観点からでも重要な意味をもつ．たとえば，吹奏楽器を考えると楽器の内部の空間領域が持つ固有値（の集合）が楽器の音色を決めているからである．また，外から何らかの振動の作用を受けたとき固有振動数に一致していれば共鳴して波の振幅が増大して大きな（通常でない）破壊的効果が出てしまう．大規模なビルや橋の設計もこのような固有振動の観点からの考慮がなされる．

熱伝導方程式，波動方程式いずれの場合も固有値問題 (1.4), (1.5) を通じて解が表され，固有値や固有関数の性質が元の方程式の解の性質に関わってくることがわかる．とにかく固有値問題 (1.4),(1.5) が良くわかることが重要であるということに行き着く．

§2. ラプラシアンの固有値問題

前節ではラプラシアンの固有値問題が登場してその重要性がわかりました．では固有値，固有関数は具体的にどう求めるのかという関心が膨らみますが，しかし，固有値や固有関数は領域 Ω から，単純（に見え）ながら偏微分方程式の解を通じて大域的に決まる量であるから Ω の情報が本質的に含まれていることになる．よって，領域の形状の多様性を鑑みれば明示的にこれらを表示することの困難性がわかります．

以下ノイマン境界条件の固有値問題

$$\Delta\Phi + \mu\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega, \quad \partial\Phi/\partial\nu = 0 \quad (x \in \partial\Omega), \tag{2.1}$$

に的をしぼります．後のため対応する固有関数を $\{\Phi_m(x)\}_{m=1}^{\infty}$ と記す．ただし，規格条件 $\int_\Omega \Phi_m \Phi_\ell dx = \delta_{ml}$ をみたすよう取ることができる．たとえば１次元の区間 $\Omega = (0,1)$ の場合ならば変数は１つになり方程式は常微分方程式の２点境界値問題

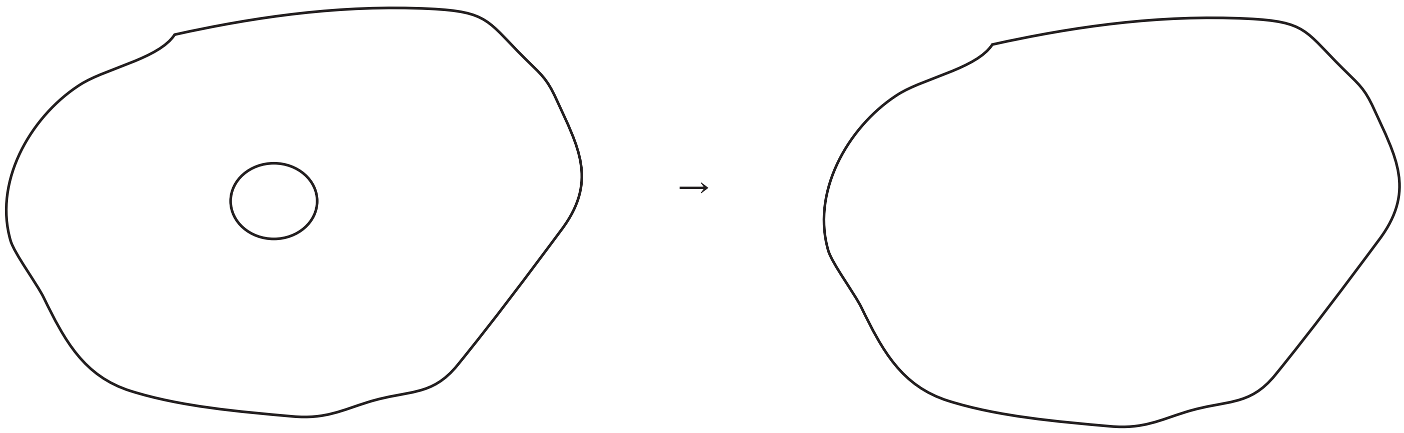
$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \mu\Phi = 0, \quad \frac{d\Phi}{dx}(0) = \frac{d\Phi}{dx}(1) = 0 \tag{2.2}$$

となりますから，具体的に計算できて m 番目の固有値は $\mu_m = (m-1)^2\pi^2$, $\Phi_1(x) = 1$, $\Phi_m(x) = \sqrt{2}\cos(m-1)\pi x$ $(m \geqq 2)$ となる．ここでわかることは番号 m が増えると固有値が大きくる対応する固有関数がだんだんと複雑になっていくことです．これは 一般的に成立する傾向です．また，Ω がどんな領域でも (2.1) では $\mu = 0$ のとき定数関数は必ず解になりますから一般に $\mu_1 = 0$ ということもわかります．また，$\mu_2 > 0$ もすぐ従います．多次元でも長方形や円など整ったもの（対称性アリ）ならやはり変数分離型の固有関数を考えて，具体計算によってある程度明示的な情報を得ることができる．それらの計算は『数学概論』(寺沢) [27] やクーランヒルベルトの本 [7] で見ることができます．さて，いよいよ本題の固有値 μ_m $(m \geqq 1)$ の領域依存性というものの話に移りましょう．さて，このような問題は大域解析学とも言われる分野で幾何学的な性質と解析学的な性質の橋渡しをする試みである．ラプラシアンやより一般に２階楕円型作用素の固有値問題は，クーランヒルベルトの有名な本『数理物理学の方法』以来盛んに研究されるようになった．そこでは，滑らかな領域変形対して固有値は連続に変化することが証明された ([7])．すなわち，有界領域 $\Omega(\zeta)$ $(\zeta > 0)$ があり，パラメタ $\zeta > 0$ ごとには $\Omega(\zeta)$ は閉包まで込めて Ω と微分同相であり $\zeta \to 0$ のとき，この同相写像が恒等写像に滑らかに収束するとする．このとき，$\Omega(\zeta)$ 上の作用素の固有値は $\zeta \to 0$ のとき収束し極限は Ω 上のそれになることが数学的に示された．このようなスムーズな変形にたいして Hadamard (アダマール) は精密な固有値やグリーン関数の摂動公式を与えた (アダマールの変分公式 [13])．微分同相写像で移りあうような領域に関しては変数変換してもとの固定された領域上の問題に帰着される．この帰着によって方程式の係数が摂動するような偏微分方程式の問題に還元され領域変形の特有の難しさが大幅に緩和される．一方，$\Omega(\zeta)$ と Ω が同相写像で移りあわないような特異的な領域変形（ワイルドな変形）も重要であることが，他の物理的な問題との関連で起きてきた．これは Schiffer-Spencer 型領域変分とも言われ，このような領域上の固有値問題は 1970 年代から研究され，現在まで多くの研究者が関わっている (Swanson, Chavel, Feldman, Beale,Garabedian, Shiffer, Ozawa, Flucher, Jimbo, Morita, Fang, Arrieta, Gadylshin, Courtois, ...)．これが本稿の主テーマである．特異変形は大雑把に言うと増加タイプ (A) と減少タイプ（退化）(B) がある．次ページ参照.

(A) １つ目のタイプとしてはもとの領域 Ω に小さい穴を空ける変形:上の図

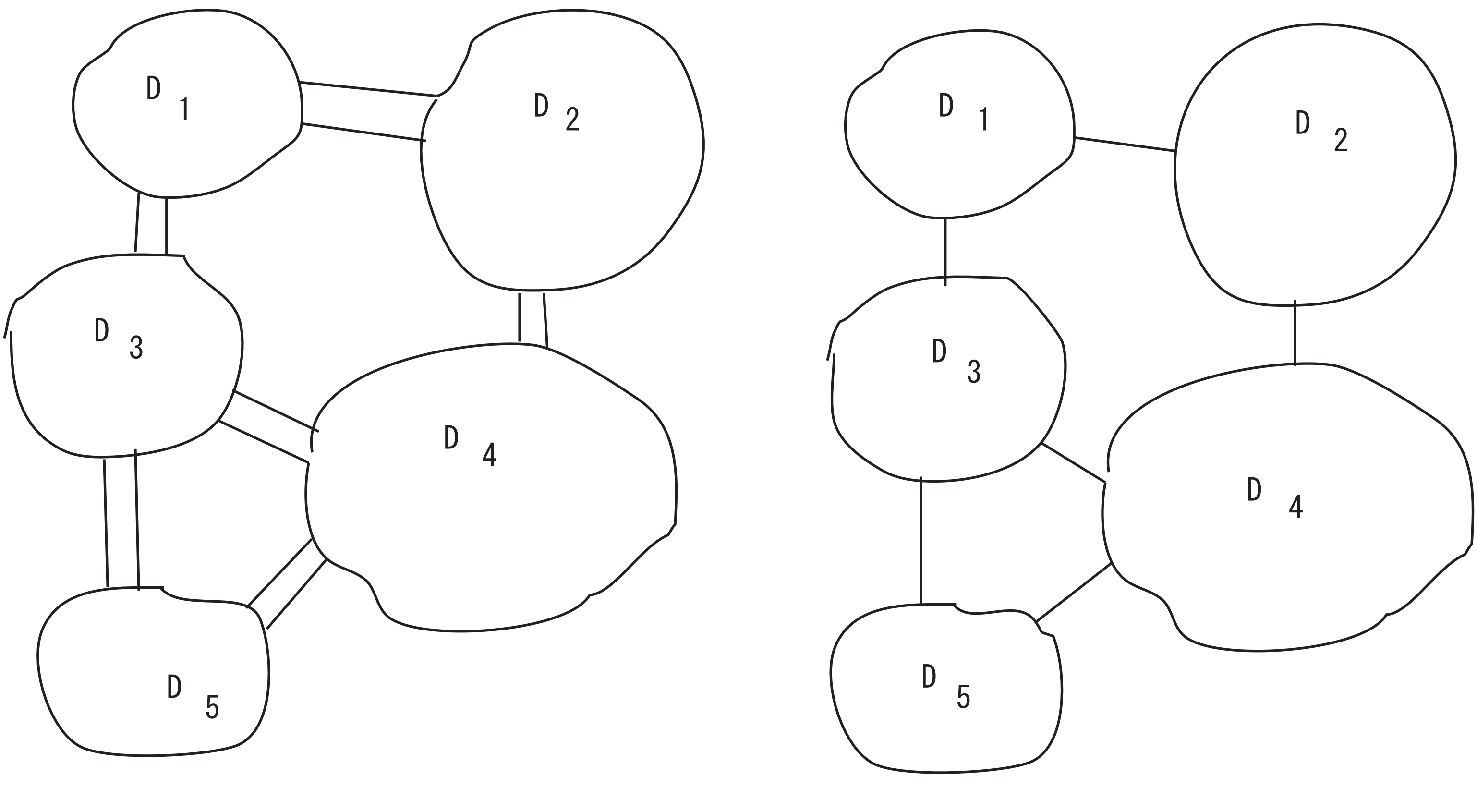
(B) ２つ目は領域の一部が退化して（やせ細って骨になってしまう）低次元の集合に収束してしまう変形：下の図

(A) 型の特異変形



半径ζの穴空き領域 Ω(ζ) → 極限領域 Ω

(B) 型の特異変形



Ω(ζ) → Ω_*

それぞれの物理的な由来としては (A) は, 物体のなかに断熱的な微細な不純物や結晶が含まれていて，全体としての特性に影響を及ぼすような現象， (B) は吹奏楽器の音の特性に関するものがある．たとえば，吹奏楽器は内部に細い（あるいは薄い）空間 (空洞) がありそこに空気の圧力（外力）が加わり音波が励起される（狭い故にされやすい）．この音波の振動が細い内部のサイズや形状に著しく依存するのである．いずれにしても極限において固有値あるいは方程式がどうなるかはアダマール変分のように変数変換による方法では解析できない．このような場合の解析には場合ごとに工夫が必要になる．さて，それぞれの場合に固有値の摂動はどうなるかを述べよう．

結果を述べるため記号や式の準備をする．また，代表的な結果を扱う．

(A) のケース (ディリクレ境界条件の場合). $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 滑らかな境界を持つ有界領域．内部の点 $\boldsymbol{p} \in \Omega$ を固定する．$\boldsymbol{p}$ を中心とする半径 $\eta > 0$ として

$$B(\boldsymbol{p}, \eta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - \boldsymbol{p}| < \eta\}$$

とおく．今 $\zeta > 0$ をパラメータとして $\Omega(\zeta) = \Omega \setminus \overline{B(\boldsymbol{p}, \zeta)}$ を定義する．このとき固有値問題

$$\Delta\Phi + \mu\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega(\zeta), \quad \Phi = 0 \quad (x \in \partial\Omega(\zeta)), \tag{2.3}$$

の固有値を $\{\mu_m(\zeta)\}_{m=1}^{\infty}$ とおく．このとき，$\zeta \to 0$ のとき $\mu_m(\zeta) \to \mu_m$ であることが Rauch-Taylor [23] によって証明されたが，より詳しい挙動が日本人の小沢の画期的な仕事 (cf. [19],[20],[21],[22]) のなかで示された（約２０年前）.

定理 1 (S. Ozawa [21]). 空間次元 $n = 2$ とする．μ_m は単純固有値であると仮定する．このとき

$$\mu_m(\zeta) - \mu_m = \frac{2\pi}{\log(1/\zeta)}\Phi_m(\boldsymbol{p})^2 + O((\log(1/\zeta))^{-2}) \tag{2.4}$$

定理 2 (S. Ozawa [21]). 空間次元 $n = 3$ とする．μ_m は単純固有値である

と仮定する．このとき

$$\mu_m(\zeta) - \mu_m = 4\pi\zeta\Phi_m(\boldsymbol{p})^2 + O(\zeta^{3/2}) \tag{2.5}$$

空間次元一般の場合も最近わかってきている．また，単純固有値でない場合

は重複固有値ぶんのサイズの行列の固有値が重要な役割を果たす．ディリクレ条件の場合の代表結果を述べた．ノイマン条件の場合は多少技術的な困難があり遅れているが，どちらの場合も重要な課題である．その後一般化が行われていて，現在でもまだまだ課題が多い (参考文献参照).

(B) のケース (ノイマン境界条件の場合). 領域の一部が退化して一次元に収束するようなケースを扱う．領域の設定をするために，$\mathbb{R}^n$ にいくつかの互いに素な有界領域 $D_1, D_2, \cdots, D_N$ があるとする．さらに D_i と D_j をつなぐ線

分 L_{ij} $(1 \leqq i < j \leqq N)$ が存在すると仮定する．極限においてこれらの集合の和

$$\Omega_* = \left(\bigcup_{j=1}^{N} D_j\right) \cup \left(\bigcup_{1\leqq i<j\leqq N} L_{ij}\right) \tag{2.6}$$

に収束する領域 $\Omega(\zeta)$ を考える．すなわち

$$\Omega(\zeta) = \left(\bigcup_{j=1}^{N} D_j\right) \cup \left(\bigcup_{1\leqq i<j\leqq N} Q_{ij}(\zeta)\right) \tag{2.7}$$

と表され，各 $Q_{ij}(\zeta)$ は断面が半径 ζ の $n-1$ 次元球の"ほぼ"柱状領域となっているとする．言うまでもなく $\zeta \to 0$ の極限でこの細い柱は線分 L_{ij} に近づく．この領域で固有値問題

$$\Delta\Phi + \rho\Phi = 0 \quad \text{in} \quad \Omega(\zeta), \quad \partial\Phi/\partial\nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega(\zeta), \tag{2.8}$$

の固有値を考える．固有値は $\{\rho_m(\zeta)\}_{m=1}^{\infty}$ と書くことにしよう．

固有値の極限を記述するための記号を設定する．まず $D = \cup_{j=1}^{N} D_j$, $L = \cup_{j<j} L_{ij}$ とおく．

$$\Delta\phi + \omega\phi = 0 \quad \text{in} \quad D, \quad \partial\phi/\partial\nu = 0 \quad \text{on} \quad \partial D, \tag{2.9}$$

$$d^2\psi/dz^2 + \lambda\psi = 0 \quad \text{in} \quad L, \quad \psi = 0 \quad \text{on} \quad \partial L. \tag{2.10}$$

ここで ∂L は線分たちの端点の集まりとなる．それぞれの固有値 (重複度に応じて数えて順に並べている) を $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ とおく．それぞれに対応する固有関数の完全直交系 $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ とおく．ただし，正規直交条件

$$\int_D \phi_m\, \phi_\ell dx = \delta_{m\ell}, \; \int_L \psi_m\, \psi_\ell dx = \delta_{m\ell}, \; (m,\, \ell \geqq 1).$$

これらの和集合 $\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ を重複度に応じて数えて小さい順に並べたものを $\{\rho_m\}_{m=1}^{\infty}$ とおいておく．J.T. Beale [2] の結果により $\lim_{\zeta\to 0}\rho_m(\zeta) = \rho_m$ が成立することが示される．より精密な特徴付けがその後与えられた．Beale の結果により $\rho_m(\zeta)$ と ρ_m 対応しているので ρ_m を作る並べ替えを逆に対応させて

$$\{\rho_m(\zeta)\}_{m=1}^{\infty} = \{\omega_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\lambda_k(\zeta)\}_{k=1}^{\infty} \tag{2.11}$$

としておく．このとき，次の定理 が成立する (cf. Jimbo [16], Jimbo-Morita [15])．

定理 3. 極限固有値に関し

$$\{\omega_k\}_{k=1}^{\infty} \cap \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} = \emptyset \tag{2.12}$$

を仮定する．また，ω_k は単純固有値とする．このとき，

$$\omega_k(\zeta) - \omega_k = \tau_{n-1}\zeta^{n-1}\int_L ((\frac{dV_k}{dz})^2 - \omega_k V_k^2)dz + o(\zeta^{n-1}),$$

ただし，$V_k = V_k(z)$ は

$$\frac{d^2 V_k}{dz^2} + \omega_k V_k = 0 \quad \text{in} \quad L, \quad V_k = \Phi_k \quad z \in \partial L \cap \partial D, \tag{2.13}$$

の一意解である．(2.13) の解の存在は仮定 (2.12) より従う．ここで，τ_{n-1} は $\mathbb{R}^{n-1}$ における単位球の体積とする．

特に最初の N 個の固有値 $\rho_1 = \cdots = \rho_N = 0$ やそれに対応する $V_1, V_2, \cdots V_N$ が一次関数になることなどを用いると N 番目までの固有値は具体的に表示できる．
特に $\rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_N = 0$ や それに対応する $V_1, V_2, \cdots V_N$ が一次関数になることなどを用いて次が計算される．
定理 4.

$$\rho_k(\zeta) = \tau_{n-1}\alpha_k \zeta^{n-1} + o(\zeta^{n-1})$$

ただし，定数 $0 \leqq \alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \cdots \leqq \alpha_N$ は N 次の実対称行列 $A = (A_{ij})$ の固有値である．行列 A は

$$A_{ij} = \begin{cases} \sum_{s \neq i} |D_i|^{-1}\kappa_{is} & \text{for} \quad i = j \\ -|D_i|^{-1/2}|D_j|^{-1/2}\kappa_{ij} & \text{for} \quad i \neq j \end{cases}$$

$\kappa_{ij} = 1/|L_{ij}|$ である．

もう一つの固有値の族である $\lambda_k(\zeta)$ についても J. Arrieta [1], R. Gadylshin [12], Jimbo-Kosugi [17] らの研究がある．固有値のそれらによると空間次元に依存して面白い差が現れる．また，(2.12) が成立しないケースは収束オーダーが変わることが神保，小杉（北大）の研究でわかってきている．

§3. 熱伝導方程式の極限と有限次元力学系

さて (B) 型の領域 $\Omega(\zeta)$ で熱伝導方程式を考えてみる．

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0 \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \Omega(\zeta), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad (t, x) \in (0, \infty) \times \partial\Omega(\zeta). \end{cases} \tag{3.1}$$

一般の解は

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m e^{-\mu_m t} \Phi_m(x)$$

と表されるが，今固有値はすべてゼロ以上の実数で

$$0 = \mu_1(\zeta) \leqq \mu_2(\zeta) \leqq \mu_3(\zeta) \leqq \cdots \to \infty$$

であるから大きい固有値の成分は 因子 $e^{-\mu_m(\zeta)t}$ のため $t \to \infty$ のときゼロに減衰することがわかる．従って，解は時間が十分たつと第一固有関数の成分のみが生き残り，他成分は減衰してしまう．すなわち $u(t, x)$ は x に関する定数関数に近づくことがわかる．これは平滑化と言って熱伝導方程式の特有の性質である．物理的には温度分布があれば高い地点から低い地点に熱が移動し，かつ断熱条件から境界からは熱が外に逃げられないので，最初の初期分布で持っていた全熱量をやがては領域全体で平等に分け合うことになる．結

局，定温状態に落ちつくことになる．最終的にはどうなるかだけで見ると現象の説明はこれでつきているが，しかし，途中の状態変化を詳しく見ると領域の特徴が大きく反映する．領域 $\Omega(\zeta)$ をよく見てみよう．広い部分 D_j が N 個ありそれを細い通路が結んでいる．素朴に考える通り，熱は細い通路は通りにくく，各 D_j の中では通常の速さで温度が平均化してゆく． ζ が小さければ小さいほど通路を通じた熱の交換はしにくくなり， D_i と D_j 間で熱交換が行われ全体が平均化するのはどんどん遅くなるのがわかるであろう．この現象はまず最初のある時間で各 D_j ではほぼ一定の温度 ξ_j $(1 \leqq j \leqq N)$ に近づき，あと非常に長い時間でゆっくりと細い通路を通じて熱交換をして全体として一定温に近づくことが考えられる．すなわち，長時間の現象は各 D_j での温度変化として記述される．すなわち，温度分布の変化という無限次元力学系が $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_N$ という有限個の変数の時間変化で近似的に表される．これは，熱現象という無限次元力学系の有限次元力学系への還元されると言っても良い．この考察は数学的にも正当化され，熱方程式 (3.1) の長時間の挙動は次の N システムの常微分方程式（勾配系）で表される．

$$M\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_N\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\tau_{n-1}\zeta^{n-1}\nabla_\xi G(\xi) \tag{3.3}$$

ただし，

$$G(\xi) = G(\xi_1, \cdots, \xi_N) = \sum_{1\leqq i<j\leqq N} \kappa_{ij}(\xi_i - \xi_j)^2 \quad (\xi \in \mathbb{R}^N)$$

$$M = \begin{pmatrix}|D_1| & 0 & \dots & 0\\ 0 & |D_2| & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & |D_N|\end{pmatrix}$$

である．これを数学的に証明するには固有関数

$$\Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_N$$

が ζ に依存してどう挙動するか見なければならならい．偏微分方程式から固有関数の特徴付けを解析するのは固有値の精密解析には不可欠のことである．このことは，[14], [15], [16] などの仕事のなかで見られる．

参考文献

[1] J. Arrieta, Rates of eigenvalues on a dumbell domain, Trans. AMS **347** (1995), 3505-3532.

[2] J. T. Beale, Scattering frequencies of resonators, CPAM **26** (1975), 549-563.

[3] I. Chavel and D. Feldman, Spectra of domains in compact manifolds,J. Funct. Anal. **30** (1978), 198-222.

[4] I. Chavel and D. Feldman, Spectra of manifolds with small handles, Comment. Math. Helv. **56** (1981), 83-102.

[5] I. Chavel and D. Feldman, Spectra of manifolds less a small domain, Duke Math. J. **56** (1988), 399-414.

[6] G. Courtois, Spectra of manifolds with small holes, J. Funct. Anal. **133** (1995), 194-221.

[7] クーラン，ヒルベルト, 数理物理学の方法，東京図書.

[8] Q. Fang, Asymptotic behavior and domain dependency of solutions to a class of reaction-diffusion system with large diffusion coefficients, Hiroshima Math. J. **20** (1990), 549-571.

[9] M. Flucher, Approximation of Dirichlet eigenvalues on domains with small holes, J. Math. Anal. Appl. **193** (1995), 169-199.

[10] P.R. Garabedian, Partial Differential Equations, J. Wiley and Sons, 1964.

[11] P.R. Garabedian and M. Schiffer, Convexity of domain functionals, J. Analyse Math **2** (1952-53), 281-369.

[12] R. Gadylshin, On scattering frequencies of acoustic resonator, C.R.Acad.Sci.**316** (1993),959-963.

[13] J. Hadamard, Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrée, Oeuvres, C.N.R.S. **2** (1968), 515-631.

[14] S. Jimbo, The singularly perturbed Domain and the Characterization for the Eigenfunctions with Neumann Boundary Condition, JDE **77** (1989) 322-350, Correction, **84** (1990), 204.

[15] S. Jimbo and Y. Morita, Remarks on the behavior of certain eigenvalues on a singularly perturbed domain with several thin channels, Comm. PDE **17** (1992), 523-552.

[16] S. Jimbo, Perturbation formula of eigenvalues in a singularly perturbed domain, J. Math. Soc. Japan **42** (1993), 339-356.

[17] S. Jimbo and S. Kosugi, Spectra of domains with partial degeneration,

[18] S. Mizohata, Partial Differential Equations,

[19] S. Ozawa, Electrostatic capacity and eigenvalue of Laplacian, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo, **30** (1983), 53-62.

[20] S. Ozawa, Spectra of domains with small spherial Neumann boundary, J. Fac. Sci. Univ.Tokyo, **30** (1983), 259-277.

[21] S. Ozawa, Singular variation of domains and eigenvalues of the Laplacian, Duke Math. J. **48** (1981), 769-778.

[22] S. Ozawa, Hadamard's variation of the Green kernels of heat equations and traces, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 455-473.

[23] J. Rauch - M. Taylor, Potential and scattering theory on wildly perturbed domains, J. Func. Anal. **18** (1975), 27-59.

[24] M. Reed- B.Simon, Methods of modern mathematical physics, IV : Analysis of Operators, Academic Press, 1978.

[25] C.A. Swanson, Asymptotic variational formulae for eigenvalues, Canad. Math. Bull. **6** (1963), 15-25.

[26] C.A. Swanson, A domain perturbation problem for elliptic operators, Ann. Mat. Pura Appl. **64** (1977), 229-240.

[27] 寺沢寛一, 数学概論, 応用編, 1960.