現象とともに微分方程式を学ぶ

神保秀一

北大理学研究院数学部門

概要

1. 基礎教育の役割
2. 数学を学ぶ意義
3. 微分方程式の背景
4. 現象の微分方程式モデル

仕事

教育:

全学教育 (教養部)

微分積分, 線形代数
数学概論, 一般教育演習, 等

専門教育 (数学科)
解析学の講義, セミナー, 卒研, 等

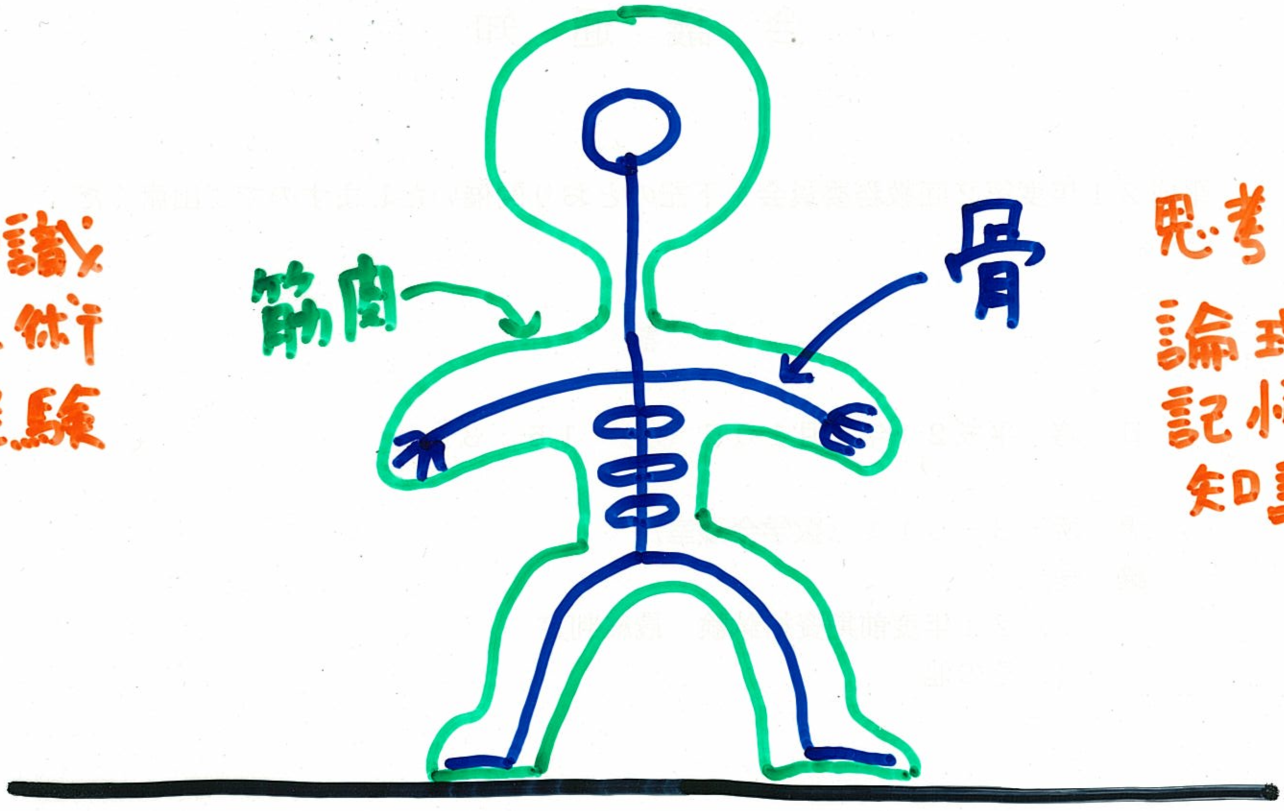
研究: 応用解析学, 偏微分方程式

楕円型作用素とスペクトル解析

ギンツブルク-ランダウ方程式

1. 基礎教育の役割… 骨を作る

知識
技術
経験



思考力
論理性
記憶力
知識

骨格 …… 基礎教育

筋肉 …… 専門教育

小学校
中学校
高校
大学教養部

2. 数学を学ぶ意義

数学の多面的な価値, 意義

(A) 有用性, 実用性 (役に立つ)

様々な自然科学やテクノロジーにおいて役に立つ

類似の例：様々な技術, 科学的思考法や仕組み

(B) 教育的意義, 価値

数学を学んで得られる知恵や磨かれる資質の効用

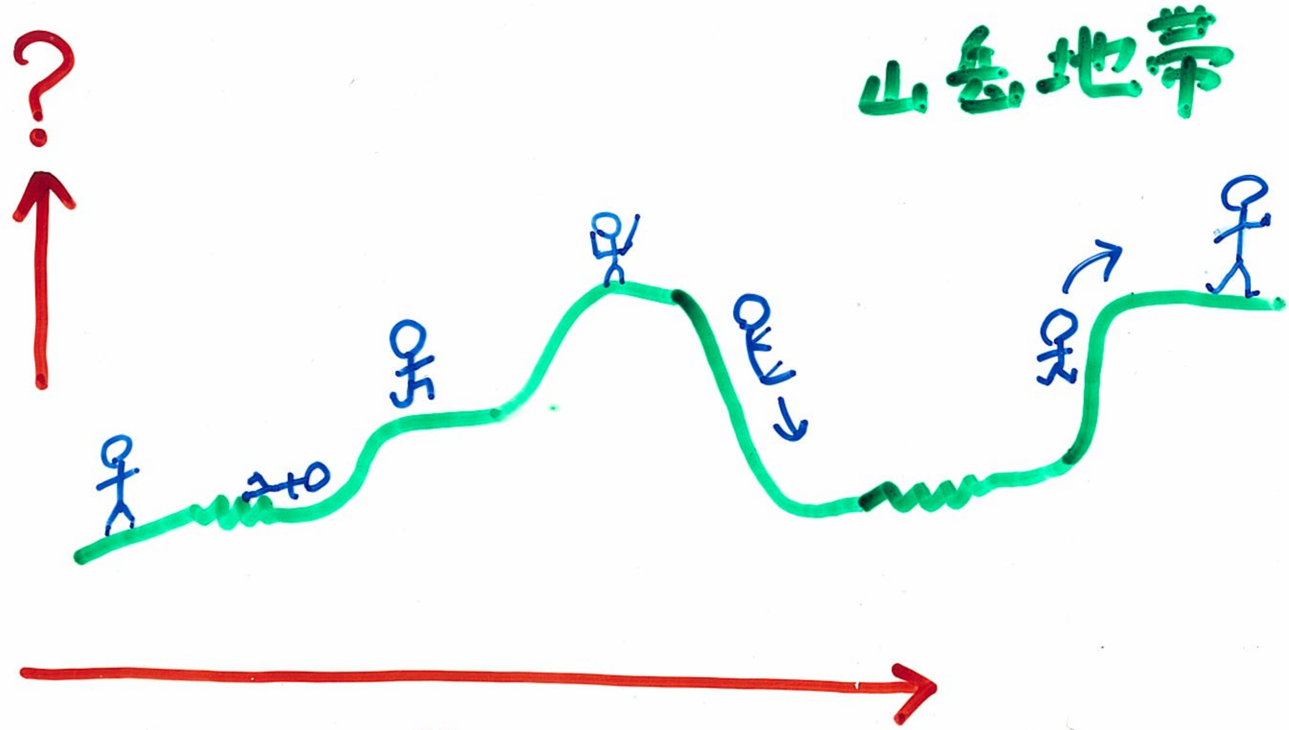
類似の例：ソロバン, 外国語, 囲碁将棋, 様々なお稽古事

(C) 普遍性, 文化的, 芸術的価値

確立した定理は永遠に正しい, 未知に挑むことの楽しみ
すぐに役立たないが長い目でみると揺るぎない価値がある

類似の例: 先人の教え, 自由平等の思想, 社会正義
類似の例：源氏物語, 坊ちゃん, モナリザ

数学の勉強とMotivation



数学ハイキングの
苦しさと楽しさ

困難を乗り越えるための
強い動機

3. 微分方程式の背景

微積分学のはじまり

16, 17 世紀： 近代的な科学の時代の始まり

力学現象, 天体現象と観測 $\Longrightarrow$ (法則化)

$\Longrightarrow$ コペルニクス的転回 (天動説から地動説へ)
ガリレオ・ガリレイの落体の法則
ケプラーの法則 (天体の楕円軌道)
振り子の等時性の発見 (ガリレイ)

ニュートン力学, 運動方程式 $\Longrightarrow$ (物理量と運動の法則の定式化)
$\Longleftrightarrow$ 微分積分学 (ホイヘンス, ニュートン, ライプニッツ)
微分方程式 (ベルヌーイ ...)

ケプラーの法則の数学的証明力学, 現象の解明

18 世紀：

様々な力学現象への微分方程式の応用
$\Longleftrightarrow$ 様々な具体的な微分方程式の解明, 特殊関数

18, 19 世紀：

熱, 波動方程式, 電磁気学, 連続体力学 $\Longrightarrow$
Maxwell 方程式, 弾性体方程式, Navier-Stokes 方程式など

20 世紀以降：
量子力学, 相対性理論, その他大部分の物理学分野でモデルとして, 偏微分方程式が現れる.

$\Longrightarrow$ 幾何学, 関数解析, 大域的解析学, 等の数学の理論と応用

4. 現象の微分方程式モデル

Newton の運動方程式

(物体の運動法則)

$$M\vec{a} = \vec{F}$$

質量 × 加速度 = 外力

(ア) 自由落下

(イ) 単振動

(ウ) 斜面上の物体の運動

(ア) 自由落下 (Free Fall)

空気中を物体が重力に従って落下

u : 位置座標

(鉛直下向きを正)

$$F = Mg - \mu \frac{du}{dt}$$

$$a = \frac{d^2u}{dt^2}$$

M : 質量

g : 重力加速度

μ : 抵抗係数

$$M\frac{d^2u}{dt^2} = Mg - \mu\frac{du}{dt}$$

u : 未知関数

$$v = \frac{du}{dt}$$

$$M\frac{dv}{dt} = Mg - \mu v$$

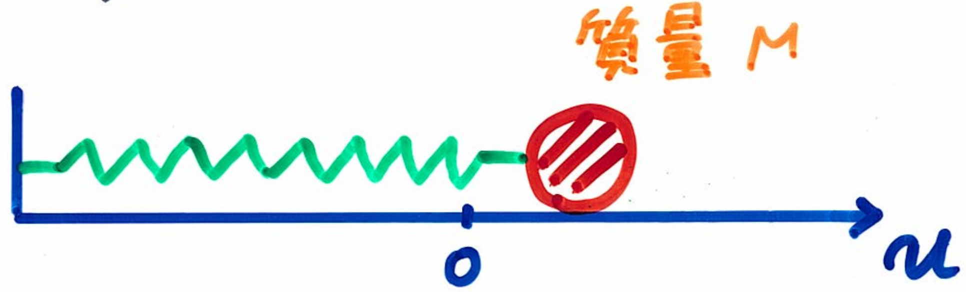
$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\mu}{M}v$$ （変数分離型）

$$v(t) = \frac{Mg}{\mu} + \left(v_0 - \frac{Mg}{\mu}\right)e^{-\frac{\mu}{M}t}$$

終端速度（ターミナルベロシイティ）

初速度

(イ) 単振動



$$F = -Ku$$ （フックの法則）

バネ定数

$$a = \frac{d^2u}{dt^2}$$

$$M\frac{d^2u}{dt^2} = -Ku$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{K}{M}u = 0$$

$$\omega = (K/M)^{\frac{1}{2}}$$

定理 方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \omega^2 u = 0$$

の任意の解 $u = u(t)$ は

$$u(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t$$

と書ける.

(証) $2\,du/dt$ を両辺にかけて変形

$$2\frac{du}{dt}\frac{d^2u}{dt^2} + 2\omega^2 \frac{du}{dt} u = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \omega^2 u^2 \right) = 0$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + \omega^2 u^2 = C \geqq 0$$

$$\frac{du}{dt} = \pm\sqrt{C - \omega^2 u^2}$$

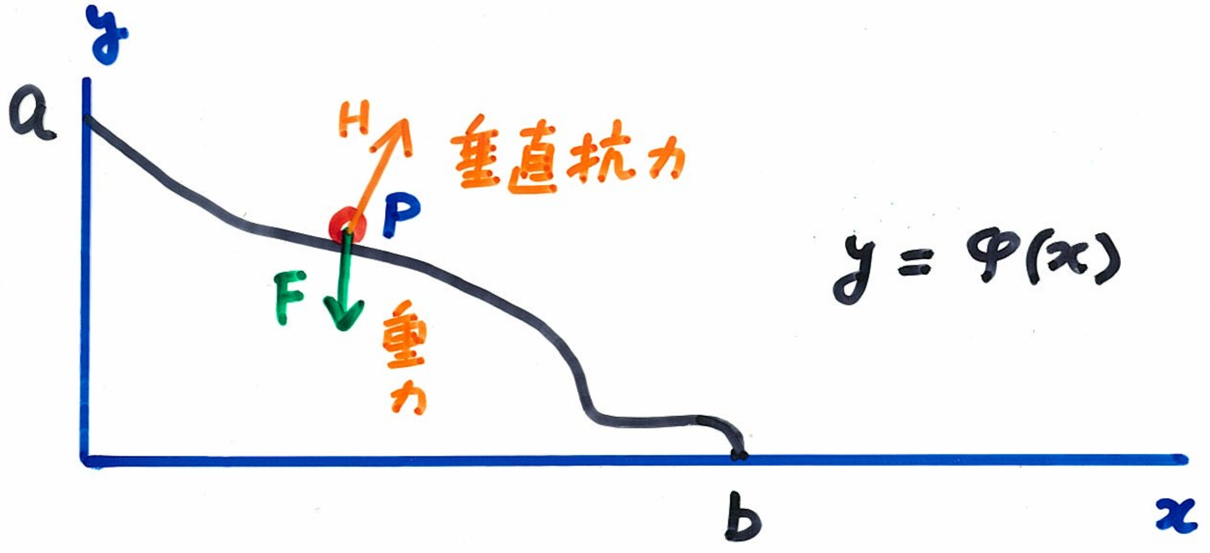
$$\frac{1}{\sqrt{(C/\omega^2) - u^2}}\frac{du}{dt} = \pm\omega$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{(C/\omega^2) - u^2}}\,du = \pm\omega t + C'$$

$u = \frac{\sqrt{C}}{\omega}\sin\theta$ で置換積分して

$$\theta(t) = \pm\omega t + C'$$

(ウ) 斜面上の物体の運動



質点 $P(x,y)$ 斜面上

$$x=\theta(t),\quad y=\varphi(\theta(t))$$

速度 $\vec{v}=\left(\frac{d\theta}{dt},\ \frac{d}{dt}\varphi(\theta(t))\right)$

加速度 $\vec{a}=\left(\frac{d^2\theta}{dt^2},\ \varphi'(\theta)\frac{d^2\theta}{dt^2}+\varphi''(\theta)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right)$

$F=(0,-Mg)$

$$M\left(\frac{d^2\theta}{dt^2},\ \frac{d^2}{dt^2}\varphi(\theta(t))\right)=(0,-Mg)+H$$

方程式の両辺と2vと内積とる

$$2M\left(\frac{d\theta}{dt}\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{d}{dt}\varphi(\theta)\frac{d^2}{dt^2}\varphi(\theta)\right)$$

$$= -2Mg\frac{d}{dt}\varphi(\theta(t))$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\left(\frac{d}{dt}\varphi(\theta)\right)^2\right)=-g\frac{d}{dt}\varphi(\theta(t))2$$

$$(1+\varphi'(\theta)^2)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=-2g\varphi(\theta)+C$$

初期条件より $\theta(0)=0,\ \varphi(0)=a$

$\theta'(0)=0 \Rightarrow C=2ga$

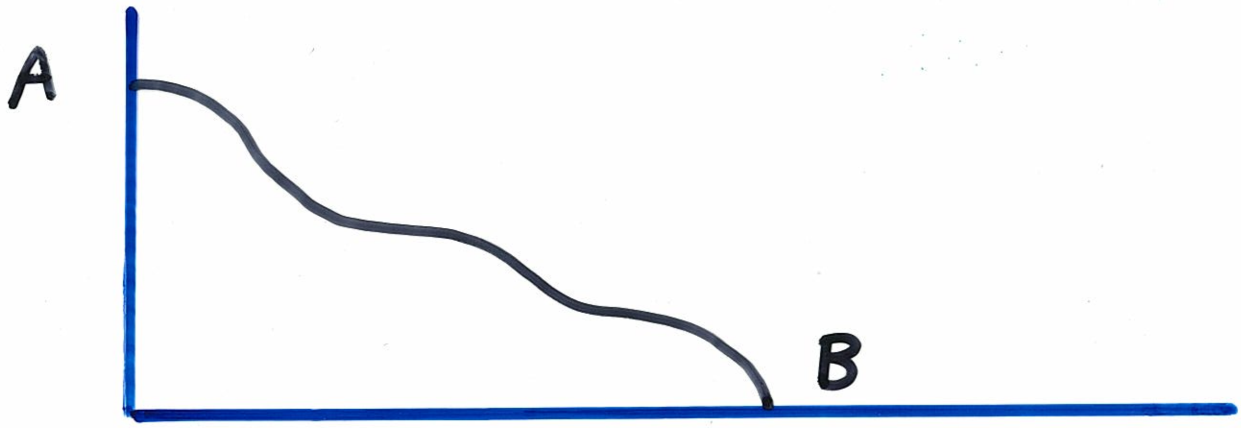
$$\sqrt{1+\varphi'(\theta)^2}\,\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{2g(a-\varphi(\theta))}$$

$$\int_0^{\theta(t)}\sqrt{\frac{1+\varphi'(\xi)^2}{a-\varphi(\xi)}}\,d\xi=\sqrt{2g}\,t$$

A → B の所用時間

$$T=\frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{b}\sqrt{\frac{1+\varphi'(\xi)^2}{a-\varphi(\xi)}}\,d\xi$$

最短降下曲線



A 地点 から B 地点 に 行く 最短時間 の 曲線 は ？

$$T(\varphi) = \frac{1}{(2g)^{\frac{1}{2}}} \int_0^b \left(\frac{1+\varphi'(\xi)^2}{a-\varphi(\xi)} \right)^{\frac{1}{2}} d\xi$$

変分問題（∞ 自由度）

$$W = \{ \varphi \in C^1((0,b)) \cap C^0([0,b]) \mid \varphi(0) = a, \varphi(b) = 0, \varphi(x) < a \}$$

変分方程式

φ を 最短時間曲線とする.

$$\frac{d}{d\varepsilon} T(\varphi + \varepsilon \phi)\Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad \left({}^{\forall}\phi \in C_0^{\infty}(0, b)\right)$$

記号 $F(p, q) = \dfrac{1}{\sqrt{2g}} \left(\dfrac{1+q^2}{a-p} \right)^{\frac{1}{2}}$

これにより

$$T(\varphi) = \int_0^b F(\varphi(x), \varphi'(x))\, dx$$

$$\frac{d}{d\varepsilon} T(\varphi + \varepsilon \phi)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_0^b \left(\frac{\partial F}{\partial p}(\varphi, \varphi')\phi + \frac{\partial F}{\partial q}(\varphi, \varphi')\phi' \right) dx = 0$$

ϕ の任意性(変分原理)

$$\frac{\partial F}{\partial p}(\varphi, \varphi') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial q}(\varphi, \varphi') \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi' \frac{\partial F}{\partial q}(\varphi, \varphi') - F(\varphi, \varphi')\right) = 0$$

$$\varphi'' \frac{\partial F}{\partial q} + \varphi' \left(\frac{\partial F}{\partial q}(\varphi, \varphi')\right)'$$

$$- \frac{\partial F}{\partial p}\varphi' - \frac{\partial F}{\partial q}\varphi'' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{q}{\sqrt{(a-p)(1+q^2)}}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi' \frac{\varphi'}{\sqrt{(a-\varphi)(1+\varphi'^2)}} - \sqrt{\frac{1+\varphi'^2}{a-\varphi}}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{\sqrt{(a-\varphi)(1+\varphi'^2)}}\right) = 0$$

$$(a-\varphi)(1+\varphi'^2) = C^2 > 0$$

$$\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 = \frac{C^2 - (a-\varphi)}{a-\varphi}$$

$$a-\overset{\overset{y}{\shortparallel}}{\varphi} = \frac{c^2}{2}(1-\cos\theta)$$

曲線 $y=\varphi(x)$ で θ でパラメータ表示する

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{c^2-\frac{c^2}{2}(1-\cos\theta)}{\frac{c^2}{2}(1-\cos\theta)}$$

$$= \frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta} = \left(\cot\frac{\theta}{2}\right)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm\cot\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{d\theta}$$

$$-\frac{c^2}{2}\sin\theta = \pm\cot\frac{\theta}{2}\frac{dx}{d\theta}$$

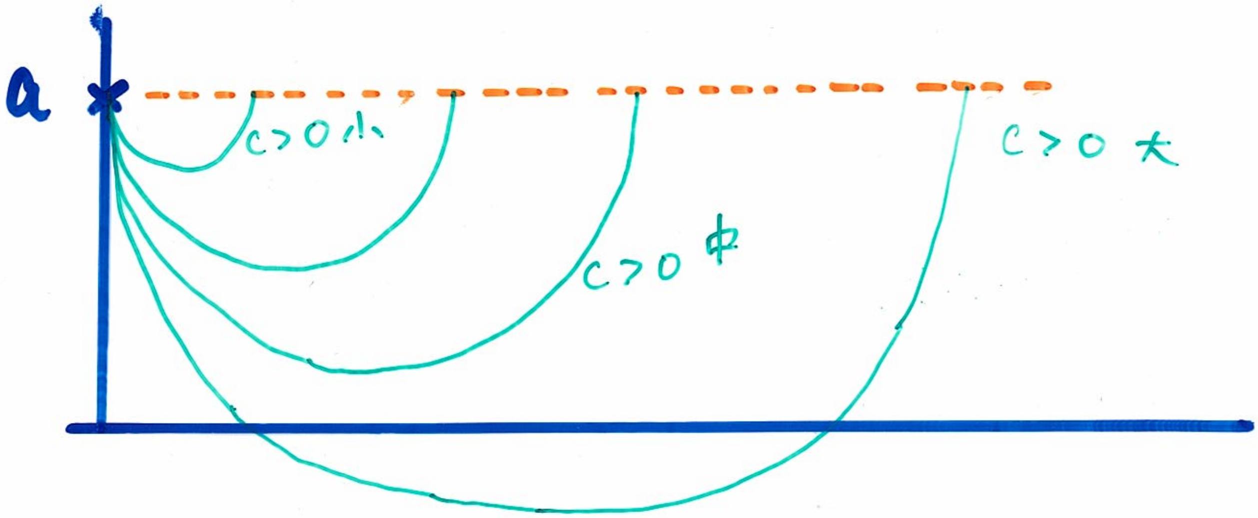
$$\frac{dx}{d\theta} = c^2(\mp 2)^{-1}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 = \mp\frac{c^2}{2}(1-\cos\theta)$$

プラスのみ採用

$$x = \frac{c^2}{2}(\theta-\sin\theta)$$

$$y = a-\frac{c^2}{2}(1-\cos\theta)$$

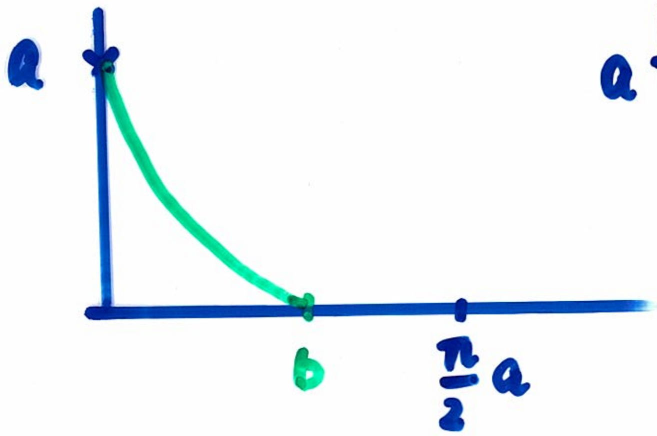
サイクロイド

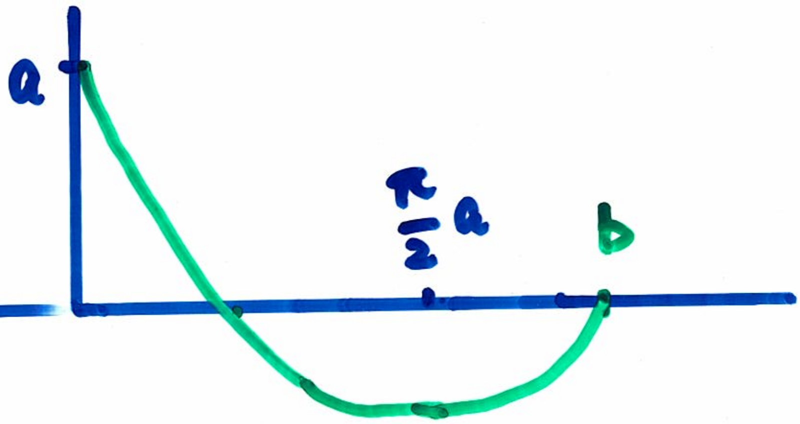


A，Bを結ぶサイクロイドが

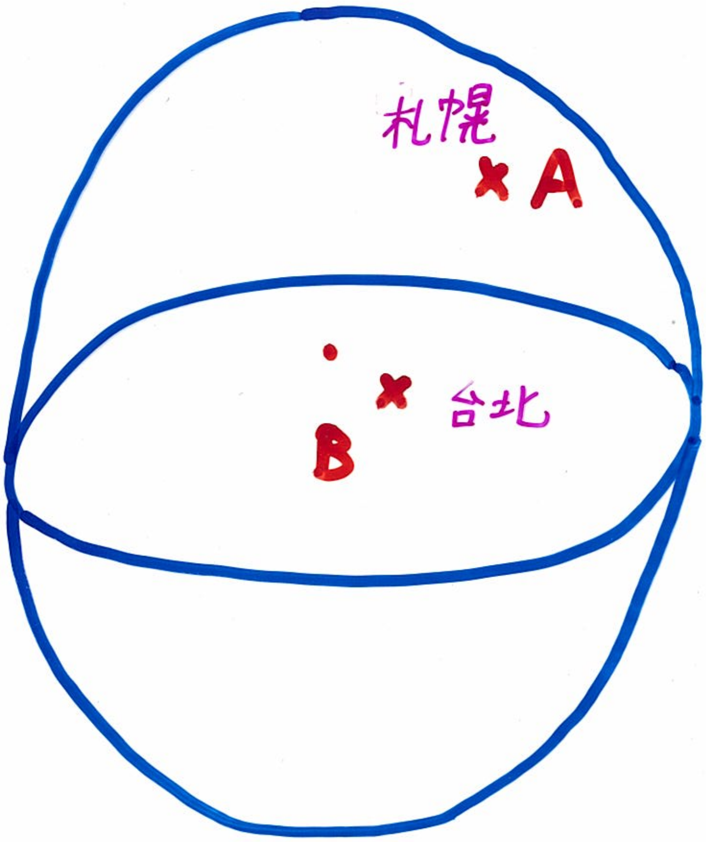
最短降下曲線

$b \leqq \frac{\pi}{2}a$　　　$b > \frac{\pi}{2}a$





地球(3次元球)内の最短降下線



A地点からB地点トンネル(摩擦なし空気抵抗なし)を作って所用時間Tを比べる。"最短降下線"

(答) A,B,O(地球の中心)を含む平面内の大円の円内サイクロイド

(エピサイクロイド)

小さい円をころがして、円上の定点が描く曲線

参考文献

[0] アーノルド, 数理解析のパイオニアたち, シュプリンガー数学リーディングス

[1] クーラン・ヒルベルト, 数理物理学の方法 2, 東京図書

[2] 神保, 微分方程式概論 (サイエンス社)