科学技術の世界 (やさしい線形代数と固有値) 質問に対するやさしい回答

No. ９ (２００３年１２月１２日の分, No. ８ は欠番)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

お早うございます．今回も，すべての質問には残念ながら答えられませんでした．(答えづらいけれど，良い質問もたくさんありました)．回答もれのある場合や納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．また，教科書 (「線形写像と固有値」共立出版) の説明も参照してください．

レポート問題についての補足説明． 過去の配布済みプリントは，Web-page 上に置いてあります：
http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/~ ishikawa/lecture.html
講義で説明した演習問題の解答例も載せています．回収した演習プリントも載っています．念のため，その問題を書いておきます：演習プリント No.6 の問題：

線形写像 $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3, f(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x}, (\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^4)$ に対して，$\mathrm{Im}(f)$ の基底と $\mathrm{Ker}(f)$ の基底を求めよ．(もう一度解けますか？)

演習プリントの問題の解答例は講義中にも説明しましたが，その解答例は，あくまで「略解」なので，それをもとに解答を書く場合でも，必ず自分の言葉で自分で考えた説明を補って，自分の実力を充分に表現してください．他の課題についても，同じように，なるべく詳しい説明をつけて，自分の実力を充分に発揮してください．

また，課題中の”３題”，”５題”等は「大問」のことです．

なお，レポートは，表紙以外は，自分の持っているレポート用紙を使ってください．表紙以外のサイズな自由です．なお，万一，極めて酷似した内容のレポートが複数見つかったら，それらの人のレポート点は，すべて零点となります．悪しからず．(したがって，自分自身の言葉で説明を補うことが重要です．)

連絡事項． 今日 (１２月１９日 (金)) と来年 (２００４年) １月９日 (金) でこの講義は終了します．なお，補講は都合により開講できません．ご了承ください．

問． 行列を対角化することで，何が得られるのですか？ただ，表現行列が対角行列だとわかると便利になる，ということですか？

答． そうです．基底を選んで，表現行列が，もし対角行列になれば，その線形変換が極めて簡単になり，いろいろ便利になります．

問． 線形変換のイメージは，固有値を出すまでわからないのですか？

答． そうです．見た目が複雑になっている行列でも，固有値を調べ，固有空間を調べれば，その性質がよくわかります．たとえば，固有空間の次元をたして，全体の次元になれば，その行列が対角行列に表され，見かけの割に複雑でないことがわかります．

問． 固有値の等しい行列どうしは，どのような結びつきがあるのでしょうか？

答． 固有値がすべて等しくても，違う行列である場合は，もちろんあります．たとえば，$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値は 1, 1 で，$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の固有値も 1, 1 で，固有値はまったく同じですが，少し性質の違う行列です．I については，$\dim V(1) = 2$ ですが，A については，$\dim V(1) = 1$ だからです．

問． 固有ベクトル空間とは，どのような空間なのですか？// なぜ固有空間は $\mathbf{0}$ を含まなければならないのですか？

答． １つの固有値に注目して，その固有値に対応する固有ベクトルをすべて集め，さらに，それらの集合に，$\{\mathbf{0}\}$ も仲間に入れて部分空間としたものです．

問． 固有値が重解のとき，固有空間が２次元になったりしないのですか？// 固有空間の次元が２以上になるのはどんなときですか？// 固有方程式が重解を持っているとき，行列は何か特殊な行列であったりするのですか？

答． 重解であっても，次元は特定できません．１次元の場合も，２次元の場合も，３次元の場合もあります．

問． 行列の成分で，複素数も実数と同じように扱えるのでしょうか？// 複素数の範囲で，固有ベクトルや固有値が考えられるのはなぜですか？// 固有値以降のことを考えるには，複素数がカギとなるのですか？

答． 扱えます．ただし，複素数の範囲で考える場合は，$\mathbf{R}^n$ での話ではなく，$\mathbf{C}^n$ (成分が複素数であるような n 次ベクトルの全体) での話になります．

問． 複素数のスカラー倍，たとえば，”i 倍” になるというのは，どういうことなのですか？

答． まず，$n = 1$ つまり，$\mathbf{C}$ の場合を考えます．$z \in \mathbf{C}$ について，z の i 倍，つまり，iz は，z をガウス平面上，90° 回転したもの，という意味があります．一般次元の場合は，各成分を 90° 回転したものという意味があります．

問． 線形変換の表現行列の $B = P^{-1}AP$ という公式は，線形写像の表現行列の $B = Q^{-1}AP$ という公式の中の P と Q が同じになったと考えてよいのですか？

答． その通りです．

問． $L \subset \mathbf{R}^n, M \subset \mathbf{R}^m$, $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ について，$\boldsymbol{x} \in L \Rightarrow f(\boldsymbol{x}) \in M$ のとき，制限 $f : L \to M$ が考えられる，とはどういうことですか？

答． 写像には，必ず,「定義域」と「値域」を指定しなければなりませんが，その定義域を改めて L ととり，値域を改めて M ととる，ということです．

問． ケーリー・ハミルトンの定理で，$\Phi_A(t)$ の t は行列ではないのに，行列である A を代入しているのが，いま一つわかりません．

答． なるほど．考えづらいことかも知れませんが，たとえば，$t^2 + 1$ という式の代わりに，$A^2 + I$ という行列を考える，たとえば，$2t^3 - t + 2$ という式の代わりに，$2A^3 - A + 2I$ という行列を考える，ということです．t は「変数」であり，式が意味を持つ限り，何でも代入してよろしい，と考えてください．当たり前のことをしているわけではないので，新鮮な発想が必要です．

問． ケーリー・ハミルトンの定理は，$\Phi_A(A) = |AI - A| = |A - A| = 0$ となり，当たり前なのではないですか？

答． いいえ違います．ケーリー・ハミルトンの定理は，$\Phi_A(t) = |tI - A|$ という t の入った行列式を**展開したあとで t に A を代入すれば**零行列になる，という定理です．”$\Phi_A(A) = |AI - A|$” という式の変形は，(なんとなく良さそう

なだけで)，代入の意味を無視した意味のない変形なので，証明になりません．また，"$\Phi_A(A) = |AI - A|$" という式変形は，$\Phi_A(A)$ は行列であり，$|AI - A|$ は行列式の値でスカラーであるということからも，無茶苦茶な変形であることがわかります．

問． 高校のとき，ケーリー・ハミルトンの定理は，$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ について，$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E = O$ と習いましたが，関係ないのですか？// 今日の講義で言っていたケーリー・ハミルトンの定理は，３次以上の正方行列でも使えるようにしただけで，内容は同じことを示しているのですか？// n 次正方行列に一般化した定理の簡潔さに驚きました！

答． そうですね．$\begin{vmatrix} t-a & -c \\ -b & t-d \end{vmatrix} = (t-a)(t-d) - bc = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$ となります．

問． ケーリー・ハミルトンの定理の証明で，$B = P^{-1}AP, B = \begin{pmatrix} \lambda & * \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}$ のとき，$\Phi_A(t) = (t-\lambda)\Phi_C(t)$ と導いている等式の関係が把握できません．

答． $|tI - A| = |tI - PBP^{-1}| = |P(tI-A)P^{-1}| = |P||tI - B||P^{-1}| = |P||tI-B||P|^{-1} = |tI - B| = \begin{vmatrix} t-\lambda & * \\ \mathbf{0} & tI_{n-1} - C \end{vmatrix} = (t-\lambda)\Phi_C(t)$ という導き方です．

問． ガウスの定理の証明 (pp.63–64) で，$r \to \infty$ の極限をとった時の，$f(re^{2\pi it})$ の偏角の変化量がどうしても理解できませんでした．

答． $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + a_n z^n, (a_n \neq 0)$ について，$f(re^{2\pi it}) = a_0 + a_1 re^{2\pi it} + \cdots + a_{n-1}(re^{2\pi it})^{n-1} + a_n(re^{2\pi it})^n = a_0 + a_1 re^{2\pi it} + \cdots + a_{n-1}(r^{n-1}e^{2(n-1)\pi it}) + a_n r^n e^{2n\pi it}$ なので，$\dfrac{f(re^{2\pi it})}{r^n} = \dfrac{a_0}{r^n} + \dfrac{a_1 e^{2\pi it}}{r^{n-1}} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}e^{2(n-1)\pi it}}{r} + a_n e^{2n\pi it}$ となります．r をどんどん大きくしていったとき，最後の項以外は 0 にどんどん近付いていくので，$\dfrac{f(re^{2\pi it})}{r^n}$ の t に関する偏角の変化量は，最後の項だけ，つまり，$a_n e^{2n\pi it}$ で決まり，したがって，$2n\pi$ となる，という事実を証明に使っています．

問． 生成系がいまだによくわかりません．

答． たとえば，$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2 \rangle = \{c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 \mid c_1, c_2 \in \mathbf{R}\}$ です．

問． 教科書の p.8 問 5 の (1), (2) の $\boldsymbol{a}_1 = \dfrac{3}{2}\boldsymbol{a}_2 + \dfrac{1}{2}\boldsymbol{a}_3$ となることがわかりません．$x\boldsymbol{a}_1 + y\boldsymbol{a}_2 + z\boldsymbol{a}_3 = \mathbf{0}$ とおいて，連立方程式を解かなければならないのでしょうか？

答． そうですね．それが一番確実な方法ですね．

問． 一般的な２つの部分空間の共通部分を求めるには，どうしたらよいのでしょうか？

答． 部分空間 K_1, K_2 の共通部分 $K_1 \cap K_2$ を求めるには，K_1 の基底 $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ と K_2 の基底 $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_s$ を求め，さらに，$x_1\boldsymbol{a}_1 + \cdots + x_r\boldsymbol{a}_r = y_1\boldsymbol{b}_1 + \cdots + y_s\boldsymbol{b}_s$ という，($x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s$ に関する) 連立１次方程式を解くのが正攻法です．

問． 教科書 p.19 問 15 の解答が，p.98 に完全に示されていないため，正しいかどうかわかりません．

答． ここに略解を書きます．(この問題では，K_1 と K_2 がシンプルな式で表され，それらの共通部分 $K_1 \cap K_2$ の答の候補が与えられているので，直接的な方法を紹介します)．$\boldsymbol{x} \in K_1$ の条件は，$x_1 = x_2$ で，それが さらに K_2 にも属する条件は，$x_1 = x_2, x_2 = x_3$ つまり，$x_1 = x_2 = x_3$ という条件になり，M に対する条件に一致します．

問． E と I は同じですね？

答． 同じです．

問． 高校のとき，$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ をかけると，ベクトルが θ 回転すると習いましたが，それは，どこからでてきたのですか？

答． 「原点の周りの θ 回転」という線形変換を表現すれば良いので，$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の移り先と $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の移り先を求めれば良いわけですが，明かに，それらの移り先は，$\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ だからです．

問． 「スペクトル分解」というのは，どういう概念なのか教えてください．

答． 教科書の補足 K (pp.89–90) を参考にしてください．

問． 黄金比 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ というのは，何に対する $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ なのでしょうか？// なぜ「黄金」なのですか？// なぜ人は黄金比であるものを見て美しく感じるのか解明されていますか？

答． $1 : \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のことです．なぜ，人が，黄金比であるものを，黄金のように美しく感じるか，ということは解明されていないと思います．ぜひ，皆さんが解明してください．

問． 「ガウスの定理は代数学の基本定理ではないのではないか」とのご発言ですが，では，何が代数学の基本定理だとお考えですか？

答． 難しい質問ですね．代数学に基本定理などない，あるのは，基本的な方法，**いろいろな問題を記号化・代数化して解決に導くという方法**，だけである，と答えておきましょう．

問． 複素数より広い数の世界はあるのでしょうか？

答． はい，考えることができます．ハミルトンの４元数は有名ですね．

問． そもそも空間とは何ですか？いまだに空間という概念が曖昧です．

答． なるほど．でも，ベクトル空間や，部分空間，固有空間，あるいは，ユークリッド空間，デカルト空間，ヒルベルト空間，リーマン空間，などなど，いろいろな言葉がありますが，それぞれは厳密な定義が与えられています．考えてみると，**「空間」という概念は，幾何の発想そのもの**と言えます．「空間」という言葉自体は曖昧なままにした方が，幾何の発想がいろいろな問題に広く適用できて良いと考えますが，いかがでしょうか？では良いお年を！