科学技術の世界 (やさしい線形代数と固有値) 質問に対するやさしい回答

No.7 (２００３年１１月２１日の分, No.6 は欠番)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

お早うございます．今回も，すべての質問には残念ながら答られませんでした．(答えづらいけれど，良い質問もたくさんありました)．回答もれのある場合や納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．また，教科書 (「線形写像と固有値」共立出版) の説明も参照してください．なお，過去の配布済みプリントは，Web 上に置いてあります：http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/˜ ishikawa/lecture.html
念のため講義で説明した演習問題の解答例も載せています．連絡事項: １１月２８日 (金) は休講でした．

問． 線形変換とは何ですか？// 線形変換と線形写像の違いを教えて下さい．// 線形変換が特別あつかいされるのは何故ですか？// 線形変換は線形写像の一部のような気がするのですが，どうなのでしょうか？

答． $V = \mathbf{R}^n$ とおくとき，V から V への線形写像のことを特に線形変換と呼びます．線形写像の特別なクラスです．特別扱いするのは特に重要だからです．特別扱いするのは，応用上，一般の線形写像とは別の取り扱いをすべきだからです．同じ空間の中での変換なので，それを表現するための基底 (つまり基準) が定義域と値域で共通，ということがキーポイントです．具体的な応用例がないと，説得力がないと思うので，講義の中で，(教科書から少し離れて)「フィボナッチ数列の一般項の求め方」を紹介して，線形変換や固有値の意味を説明します．乞うご期待．

問． 不変部分空間とは何ですか？

答． 線形変換によって変わらない (あるいは小さくなる) 部分空間のことです．つまり，調べたい線形変換を $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ としたとき，$\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間 L が f-不変であるとは，$f(L)$ が L に含まれるときに言います (p. 51)．とくに重要なのが，１次元の不変部分空間です．「**線形変換を効果的に調べるには，まず１次元不変部分空間を調べよ**」というのがセオリーです．

問． 固有値は何のために考えるのですか？

答． 線形変換を調べるために考えます．なぜ，線形変換を調べるかというと，いろいろ応用がありますが，たとえば，量子力学では，いろいろな物理量は線形変換として捉えられます．そして，その物理量は直接は観測できなくて，その固有値だけが観測できる，という理論です．その理論が現実を有効に記述でき，現代社会は，その量子力学の理論の上に成り立っている，ということは，皆さんの知っている通りです．

問． $n \neq m$ のときの線形写像には固有値はあるのですか？

答． ありません．$n \neq m$ のときは，$A\boldsymbol{x}$ と $\lambda\boldsymbol{x}$ はベクトルのサイズが違うので，「$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$」という (固有値の定義の) 条件式に意味がありません．

問． 固有値は１回の線形変換で必ずある定数が１つだけ出てくるのですか？// １つの行列につき固有値の数は決まっているのでしょうか？固有ベクトルの数はその行列によって決定されますか？

答． 複数個出てきます．個数が決まっています．$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ の場合なら，f の固有値は，(複素数の範囲で) 重複度を込めて n 個あります．

問． 固有値はどうして複素数の範囲で考えるのですか？

答． 固有値を求めるに，代数方程式 (固有方程式) を解きます．ところが，代数方程式の解は，実数の範囲では全て求めることができません．複素数の範囲で考えるのは，代数方程式の解が複素数の範囲で全部求められるからです．

問． 複素数を用いた回転は，３次元以上で考えるときでも意味がありますか？

答．「回転」は３次元以上でも考えられます．ただし，複素数を使っては表すことができません．(複素数が使えるのは，２次元の場合です)．ところで，２次元の場合でも，回転は，複素数を使わなくても表すことができます．つまり，線形変換 $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ を $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}, A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ で定まると，これは，原点中心，角度 θ の回転を表します．重要な行列なので，覚えておいてください (p.79)．

問． $e^{i\pi} = -1$ の意味がわかりません．// 両辺を２乗すると $(e^{i\pi})^2 = e^{2i\pi} = 1$．そして対数をとると，$\log e^{2i\pi} = \log 1$, $2i\pi = 0, i = 0$ となってしまいます．これは間違っているのでしょうか？

答． 1か所だけ違います．複素数の対数をとる部分に落とし穴があります．つまり，$e^{2i\pi}$ は複素数なので，$\log e^{2i\pi} = 2i\pi$ と書くことができません．対数関数は，複素数の範囲では「多価関数」だからです．(指数関数は複素数の範囲では１対１でない．)

問． 表現行列とは線形写像を基底を使って表した行列に過ぎないのでしょうか？// 表現行列とは，$f : L \to M$ について，L の基底を写した像を M の基底の１次結合で書いた時の係数を並べた行列，と思っていたのですが，そのような説明で，はたして当たっているのでしょうか？

答． その通りです．当たっています．数学は，セオリーに従えば，きわめて簡単なことをしているに過ぎません．数学は「複雑な物事の本質を取り出して単純明快に表す」という学問です．

問． $(f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2)) = (b_{11}\boldsymbol{y}_1 + b_{21}\boldsymbol{y}_2, b_{12}\boldsymbol{y}_1 + b_{22}\boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ を説明してください．

答． f の線形性を使っているのは，「基底の行き先だけ特定すれば線形写像が決まる」というポイントだけです．

問． 表現行列と変換行列の違いは？

答． 表現行列 (p.38) は，線形写像を表現する行列，基底変換行列 (p.15) は，基底の取り替えを表現する行列です．確かに，同じ発想に基づいていて，似ていますね．

問． 表現行列は１つしかないのですか？// 表現行列を求める時に，基底が常に与えられているのはなぜですか？// 基底が異なれば表現行列が違うというのはどういうことですか？

答． 基底 (基準) を決めておかないと，表現行列が決まらないからです．基底 (基準) を変えれば，同じものでも表現は変わります．たとえ話ですが，「この土地の広さは 1000 ですよ．広いですよ」と言われ，何も聞き返さないで，$1000m^2$ だと思い込んではいけません．実は $1000cm^2$ なのかもしれないからです．基準を明示しないと，不当表示です．

問． 表現行列を求める時の基底の順番はどうでもよいのですか？// $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ という列ベクトルの組から $(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$ という行列を考えた時と，$(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2)$ という行列を考えた時，表現行列の形も変わってくると思うのですが，これは違うものなのか，同じものなのか，どう捉えればよいのでしょうか？

答． 違うものです．基底の順番は無視できません．

問． いろいろな基底で表現行列を考える意味は何ですか？// 表現行列は１つあれば充分ではないのですか？表現行列を変換したら計算が楽になるとか何らかの利点があるのでしょうか？// 基底の変更は何のために行うのですか？// 表現行列は基底のとりかたによってさまざまに変わり，基底のとりかたがふさわしい (わかりやすい) ものかチェックするもの，といういう認識でよいのでしょうか？

答． そうです．基底を取り替えるのは，簡単な (わかりやすい) 表現行列を見つけるためです．

問． 線形写像を行列で表現すると，どのようなことがわかるのですか？基底のとり方は無数にあるので，表現行列も無数にありますが，それらは全て何か共通した特徴を持つのでしょうか？

答． 見かけは違っても，同じ線形写像を表現するので，共通の性質を持ちます．それは階数が同じ，ということです．表現行列の階数を調べれば，像や核の次元がわかります．

問． $A(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n) = A = (\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_m)A$ と書いたのが，どういうことなのかわかりません．

答． n 次単位行列を右からかけたり，m 次単位行列を左からかけたりしているだけです．

問． 例題で，２つの基底のうち，どちらを P, Q にするきまりはあるのですか？// 明確な判断基準はあるのですか？// $AP = QQ^{-1}AP$ とわざわざおいたのはなぜですか？// Q に逆行列がとれないときはどうしたらよいのですか？

答． 定義域の方が P，値域の方が Q です．$AP = QB$ となる行列 B が (指定された基底に関する) 表現行列なので，その形に直して比べて，$B = Q^{-1}AP$ を求めました．Q は，基底を並べたものなので，必ず逆行列があります．

問． $\mathrm{Im}(f)$ の基底は，f を表す行列 A から $\mathrm{rank}(A)$ 分の列をとったものと考えてもよいのですか？そのとき，とり方はどうでもよいのでしょうか？

答． もちろん基底は無数にあるのですが，そのうちの１組として，$\mathrm{rank}(A)$ 分の列をとったもので得られます．ただし，そのとり方は任意ではなく，決まり (方法) があります．講義ノートや教科書 pp.32–34 を復習してください．

問． $\mathbf{R}^n$ の基底はなぜ n 個あるのでしょうか？

答． n 次元だからです．(p.13)．

問． ベクトル空間の次元と日常の空間の次元を混同してしまってよいのでしょうか？

答． 混同しないでください．現実のための理論ですが，理想化されているので，別物と考えてください．

問． 「ノルム」とは何なのですか？

答． ベクトルの長さのことです．(教科書 p.73)．

問． 記号の $\in$ と $\subset$ との違いは何ですか？

答． $\in$ は要素が属する，ということで，$\subset$ は部分集合 (要素の集まり) の記号です．個人と団体の違いです．

問． 同値関係，同値類，とはどういうことなのでしょうか？教科書の補足 C 「商ベクトル空間」を読んだのですが，あまりに抽象的なのでイメージできません．具体的な例を教えてください．

答． 同値類の具体例は,「クラス分け」です．１年１組，２組,... は同値類です，このときの同値関係は,「同じクラスに属する」という関係です．

問． 写像の合成を行うときに「$\circ$」のような「コンポジション」と呼ばれる記号を使うと知りました．$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ となるときに，その合成が $A \xrightarrow{g \circ f} C$ と書かれていました．どうして，$f \circ g$ でなくて，反対に $g \circ f$ と逆さから書いていくのでしょうか？

答． その方が自然だからです．たとえば，$a \in A$ が f によって $f(a)$ に写り，それが，g によって $g(f(a))$ に写ります．この式を見ると，どう考えても，$(f \circ g)(a)$ ではなくて，$(g \circ f)(a)$ と表した方がよいですね．そういうことです．本当は，写像の書き方を，$C \xleftarrow{g} B \xleftarrow{f} A$ と矢印を逆にしておけば何の問題がないのですが，(アラビア式，あるいは，旧日本式がきらいなのか) どうも西洋人は左から右向きに書く慣習を変えないようですね．

問． “非線形空間” どうしの写像はどのように定義されるのですか？

答． 線形空間でない場合は，線形写像というものが意味をなさないので，普通の写像だけが定義されます．

問． 「写像とは宅配便である」ということを説明してください．

答． たとえ話ですが，定義域は宅配便の送り手の住所リストで，値域は発送可能な住所のリストです．ただし１人１個の荷物だけ送ることができるとします．(二股は良くない)．荷物を送るときは，送り先の住所を明記したシールを貼らなくてはいけませんね (写像の定義)．住所シールを張らないと，荷物は迷子になります．また，違った住所を書いたシールを２枚以上貼ると，配達する人が困ります．写像が「単射」とは，２個以上プレゼントをもらう人がいない,「全射」とは，全員プレゼントがもらえて全員が感謝するということです．

問． 線形代数学の使い道が知りたいです．// 線形写像は，どのように活かされるのでしょうか？どのような分野で用いられているのですか？

答． 以前の回答書に書いてあるので参考にしてください．ともかく，この科目は学んでおいて損はありません．皆さんの今後の人生でプラスになります．しっかり身に付けておかないと後で後悔するかもしれません．

問． ふと思ったのですが，線形代数学の線形代数とは何なのでしょうか？線形学ならわかるのですが...

答． なるほど言われてみるとそうですね.「線形学」あるいは「線形数学」の方が良いですね．まあ，x^2 などが出てこないような１次式を扱う代数，といった程度の意味でしょう．

問． 教科書の「補足」についてはやるべきでしょうか？講義内容がわかりづらくなってきています．

答． 余裕があれば読んでください．わからなかったら直接質問に来て下さい．(あるいは，質問書に書いてください)．

問． 確かにこの講義は明快でわかりやすいですが，数学的かというと疑問が残ります．

答． ありがとうございます．この講義も数学的でない，ということはないと思います．確かに，数学の証明は非常に大切なのに，この講義では証明をほとんど紹介していません．しかしながら，定理を紹介したらいきなり証明を付ける，という講義スタイルには，私 (石川) は疑問に感じています．というのは，物の順序として，その定理の意味あいや，応用の仕方を学んで，その重要性を認識した上で，どうしてこんな定理が成り立つのか，知りたくなった後で証明を学ぶのが自然な流れだと思うからです．そのようなプロセスを無視して，講義で形式的に証明を紹介しても，(講師の) 自己満足になってしまう危険性が高いと考えます．とはいえ，証明を学ぶことが定理の理解に不可欠な場合もあるので，ぜひ，ご自分で教科書の証明を読んでみて，検討の上，万一わからなかったら，質問してみてください．

蛇足． ところで，コメント欄に,「湯治場に思いをはせる白い息」という名句が寄せられました.「初雪や行ってみたいな名水亭」という駄作を返しておきます．冬の１講目はお互いつらいですが，がんばりましょう．ではまた．