科学技術の世界 (やさしい線形代数と固有値) 質問に対するやさしい回答

No. 5 (２００３年１１月７日の分, No. ４は欠番)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

お早うございます．今回も，すべての質問には答られませんでした．(答えづらいけれど，良い質問もたくさんありました)．回答もれのある場合や納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．また，教科書 (「線形写像と固有値」共立出版) の説明も参照してください．なお，過去の配布済みプリントは，Web 上に置いてあります：http://www.math.sci.hokudai.ac.jp/˜ ishikawa/lecture.html
念のため講義で説明した演習問題の解答例も載せています．参考にしてください．

連絡事項: １１月２８日 (金) は休講です．

問． 核と像がわかりません．// 像と核のイメージがつかめません．

答． 線形写像があったら，まず最初に意識して調べるべきものが「像」と「核」です．まず定義ですが，線形写像 $f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, について，$\mathrm{Ker}(f) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n \mid A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$ が核で，$\mathrm{Im}(f) = \{A\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n\}$ が像です．ただそれだけのことです．定義は簡単ですが，線形写像 f あるいは，行列 A の性質を強く反映します．たとえば，$f:\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$, $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ について調べなさい，と言われたら，その像と核を求めればよいわけです．調べてみてください．結論は $\mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ で，$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ です．核は $\mathbf{R}^n$ の部分ベクトル空間です．像は $\mathbf{R}^m$ の部分ベクトル空間です．ところで，核と像という用語の覚え方として,「核」廃絶で零になる (現実にはまだある)．象を写した「像」だゾウ．などはいかがでしょう？

問． $\mathrm{Im}(f) = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ の意味が良くわかりません．

答． $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ は (f を定める) 行列 A の列ベクトルです．$\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n \rangle$ はそれらで生成される空間です．つまり，$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$, ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ は任意定数) と表されるようなベクトルの全体集合です．これが記号の意味です．$A\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ ($x_1, x_2, \ldots, x_n$ は $\boldsymbol{x}$ の成分) となるので，f の像がこのように表されます．

問． $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ において，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ となる $\boldsymbol{x}$ が核ということですか？また，$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ とするとき，$\mathbf{R}^n$ に含まれるあるベクトルが $\mathbf{R}^m$ に写し得るすべてのベクトルが像なのかなという感じなのですが...

答． そうです．そのような個々のベクトルをいうよりも，そのようなベクトルの集まり (部分ベクトル空間) に対する名称です．団体名です．

問． $\mathrm{Im}(f)$ の中に $\{\boldsymbol{0}\}$ が含まれていなくてもよいのでしょうか？// f が線形写像ならば，$\boldsymbol{0} \in \mathrm{Ker}(f)$ ですか？

答． 必ず含まれています．

問． なぜ線形写像は，(1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ (2) $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ を満たすことと同値なのですか？// (1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ (2) $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ ならば $f(\boldsymbol{x})$ が１次式であるとありましたが，そこを証明してください．

答． (1), (2) が成り立つならば，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ に対して，$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1\boldsymbol{e}_1 + x_2\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n) = x_1 f(\boldsymbol{e}_1) + x_2 f(\boldsymbol{e}_2) + \cdots + x_n f(\boldsymbol{e}_n)$ となり，１次式です．ここで，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は**標準基底** (p. 11) です．$f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots$ は，$\boldsymbol{x}$ によらないベクトルであることに注意しましょう．

問． 線形写像は (1) $f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$ (2) $f(c\boldsymbol{x}) = cf(\boldsymbol{x})$ の性質を持つとありましたが，線形写像が先に定義されて，これが成り立つことがわかったのか，それともこの性質 (線形性) が成り立つ写像を線形写像と定義したのか，どちらでしょうか？

答． 「一次式で表される」ということは素朴な概念であり，わかりやすいので，歴史的にもちろん先です．その後,「線形性」が認識され,「一次式で表されること」と「線形性を満たす」が同じことであることが認識されました．同じことなので，どちらを定義として採用しても同じです．

問． 線形写像は行列のことですか？// 行列 A を求めるというのが線形写像を見つけるということなのですか？

答． そうです．そうなのですが，より正確に言えば，**線形写像の１つの表し方が行列である**ということです．行列は，単に数値を表 (ひょう) にしたもので，そのままでは線形写像と関係ないのですが，線形写像を表現するのに丁度よいわけです．というか，線形写像を表現できるから，行列が数学的に重要であると言えます．

問． 線形写像とは，ある部分空間を別の部分空間にするということなのですか？

答． 線形写像の重要な性質として，部分ベクトル空間を部分ベクトル空間に写す，ということがあります．

問． 曲線を含む図形は扱わないのですか？

答． 直接的には扱いません．ただし，**曲がった図形は，線形近似して調べる**というのが常套手段なので，そのための (重要な) 基礎理論をここでいま学んでいるわけです．

問． 線形写像を座標 (空間) 的に考えてみて思ったのですが,「線形性 ＝ 原点を通る直線的な性質」と考えていいのですか？

答． 良いと思います．$\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への線形写像 $y = ax$ のグラフは平面の原点を通る直線ですね．実際，$f:\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ が線形写像であることは，f のグラフ $\Gamma = \{(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \in \mathbf{R}^{n+m} \mid \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n\}$ が $\mathbf{R}^{n+m}$ の部分空間であることと同じこと (同値) です．

問． 「一般には線形写像は，線形性をもつ...」と書かれていますが，例外 (一般からはずれる時の例) をあげてく

ださい.

答. 例外はありません．ここでの,「一般」という意味は，抽象ベクトル空間 (p.23) の場合も含めて，という意味です．考えてみると，数学では,「一般」を２通りの意味 (general と generic) に使いますね．注意しましょう．

問. 線形性を持つものと持たない写像の違いがわかりません．

答. たとえば，$f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$, $f(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は線形写像ではありません．線形性を持ちません．

問. 線形写像とは次元を変換することなのですか？

答. 線形写像はベクトルをベクトルに変換します．次元については変わる場合もありますが，変わらない場合もあります．

問. $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$, $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ の核 W について，$\dim(W)=n-\mathrm{rank}(A)$ とはどういう意味ですか？

答. $\mathrm{rank}(A)$ は行列 A の階数 (rank) ですね．講義で説明します．(教科書 p. 35 参照).

問. 基底を使うことでどのようなメリットがあるのですか？// X に逆行列が存在しない場合もあるのではないでしょうか？// $A=YX^{-1}$ で，X が正則行列でない場合はどうなるのですか？

答. 逆行列が存在します．基底は一次独立なので，X は正則行列です．だから，基底を使ったわけです．

問. 逆行列の求め方がよく分かりません．何次の行列でも普遍的に求められるのでしょうか？

答. 普遍的に求められます．

問. 演習プリント No.5 の問題を逆行列を使わないで直接解いてみたのですが，これも正しいのですか？このやり方は，他の問題にも応用できますか？

答. もちろん正しいです．連立一次方程式を解くということで，本質的に同じことです．他の場合にも応用できます．ただし，次元が高くなると，見通しよく (システマティックに) 計算できるかどうかが問題となります．

問. $(f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \dots, f(\boldsymbol{x}_n))$ は行列だと思いますが，行列ならカッコ内の元 ” , ” でつながないはずです．これは単に表記の違いということですか？

答. 単に表記の違いです．英語でも，コンマ ” , ” は，文のつながりを明示するために使うもので，省略しても意味が通じればよいし，意味をはっきりするために使ってもよいですね．それと同じことです．数学は，行儀作法の時間ではないので，わかりやすければ何でもありです．

問. 線形写像 $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ は，高校で習った $y=f(x)$ と同じ考え方でよいのでしょうか？$\boldsymbol{x}$ にあるベクトルを代入すると，f という変換装置，つまり代入されたベクトルに A という行列をかけるという変換を経て $f(\boldsymbol{x})$ というベクトルが出力されるという考え方でよいのでしょうか？// $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^3$, $f(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ というのは，$\mathbf{R}^2$ を f という方法で $\mathbf{R}^3$ に写像し，その方法が A という考え方で良いのですか？

答. まったくその通りです.「その方法が A をかけること」ですね．

問. 写像というのは高校までに習う関数と同義と考えてよいのでしょうか？

答. 同じです．高校で習っても大学で習っても関係ありません．線形写像は一次関数 $y=ax$ を多次元化したものです．言葉使いとして,「関数」よりも「写像」の方が考える対象が広い，という意味合いの違いはあります．

問. 写像とは一体何ですか？// 写像の概念がよくわかりません．

答. よく使うたとえ話は,「写像とは宅配便である」というものです．でも，この話をすると “かえってわからなくなる” という評判なので，ここでは説明しません．ところで,「**自然は数学の言葉で書かれている**」と言われます．そして,「**数学は集合と写像の言葉で書かれている**」とも言われます.「写像」は有効な考え方であり，深遠なものの見方です．まあ，使っているうちに，たんだんとわかってきます．大丈夫です．

問. $A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ かつ $A\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ と $A\begin{pmatrix} x_1 & x_1' \\ x_2 & x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ は同じことですか？

答. おなじことです．行列というものは，数値を表 (ひょう) に並べただけのもので，各欄に書いてある数値がすべて同じものなら，同じ行列です．

問. どうして関数を表すときに f という文字を使うのですか？

答. 「関数」を英語で function というからです．間違いない．

問. 線形微分方程式 $(\sum_{i=0}^n a_i D^i)y=f(x)$ の一般解は，$(\sum_{i=0}^n a_i D^i)y=0$ の一般解と，$(\sum_{i=0}^n a_i D^i)y=f(x)$ の解の一つ (特殊解) の和なのですか？

答. その通りです．これも本質的に線形写像の話です．数ベクトル空間 (有限次元) の場合の説明を講義でしますが，それとまったく同様です．

問. 行列式は関孝和が発見したのは本当ですか？それから，関係ないですが，誰も考えなくても存在するものならば「発見」でよいと思うのですが，この場合,「初めて考えた」が適当な表現ではないでしょうか？

答. 本当です．関孝和は日本人なので，この事実は日本の誇りですね．(その当時,「日本」という国家が成立していたかどうかはわかりませんが)．そして，確かに，歴史的には，行列よりも行列式の方が先に発見されました．(皆さんが習う (習った) 順序とは逆ですね)．ベクトルや行列のような多次元的な対象を認識するには，それなりの社会的要請が必要だったから発見が遅れたのでしょうか？いまでは行列は簡単にわかる (わかった気になる) ので，それを基に行列式を学んでいます．ところで,「発見した」というよりも「初めて考えた」というのが適当だ，というのは，正当な意見です．(より正確に言うなら「現在では行列式をよばれるものを，初めて考えて，それを記録し，その性質を調べ，方程式を解くのに応用して見せた，その資料が幸運にも残っていて，後世の人がその資料を見つけた」となりますか)．それはそうと，数学では，新しい定理や概念を「発見した」という表現をします．もちろん人間が考えるわけですが，あたかも，それは誰が考えなくてももともと存在していたものだ，という錯覚を覚えてしまうほど，自然な定理や概念だ，という意味を込めた褒め言葉なのかもしれません．ではまた．