科学技術の世界 (やさしい線形代数と固有値) 質問に対するやさしい回答

No. 3（２００３年１０月２４日の分, No. ２は欠番） 担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

おはようございます．今回も，すべての質問には答られませんでした．回答もれのある場合，納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．また，教科書 (「線形写像と固有値」共立出版) の説明も参照してください．なお連絡事項ですが，(だいぶ先の話ですが) １１月２８日 (金) は休講を予定しています．

問．「$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を満たす $\mathbf{R}^n$ のベクトル $\boldsymbol{x}$ の集まりは部分ベクトル空間」ということがよく分かりません．

答．行列の積の性質 $A(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}') = A\boldsymbol{x}+A\boldsymbol{x}', A(c\boldsymbol{x}) = c(A\boldsymbol{x})$ を使うと分かります．証明は教科書 p.9 にあります．

問．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ に注目するのはなぜですか？

答．部分ベクトル空間の典型である「平面」や「直線」が，連立一次方程式の解空間だからです．たとえば，$\mathbf{R}^3$ の中で，原点を通る平面は $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ という式で表されます．ここで，(a_1, a_2, a_3) はいわゆる法線ベクトルで，零ベクトルではないと仮定しています．その法線ベクトルを 1×3 型行列と見て A と書くと，方程式は $A\boldsymbol{x} = 0$ と表されますね．連立方程式 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$ の場合は，$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$ の階数が 2 なら $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ は直線を表し，A の階数が 1 なら，$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ はやはり平面を表します．(２つの条件が独立でない)．ところで，昔は，行列などは習わずに，むしろ,「解析幾何」と呼んで主に平面や直線などをまず習っていたものです．その平面や直線を抽象化したのが「部分ベクトル空間」です．歴史的な因縁があります．

問．基底が良くわかりません．// 基底の定義をもう一度説明してください．// 基底と生成系の違いはありますか？// 基底のベクトルは「無駄のない生成系」であると教科書にありますが,「無駄がない」とはどういう意味ですか？

答．$\mathbf{R}^m$ の中で，$L = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r\rangle$ (つまり，L の生成系) であって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立のとき，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ を L の基底と呼びます．(p. 10)．基底という場合，何の基底か，ということを言う必要があります．生成系であっても，１次独立でない場合は，基底とは呼べません.「無駄がない」というのは，１つでも取り除くと L の生成系にならない，ということです．ところで，方程式論の言葉では,「基底」は「基本解」とも呼ばれます．

問．どんなベクトル空間にも基底は存在するということですか？

答．そうです．$L = \{\boldsymbol{0}\}$ でない限り基底があります．(p. 10)．

問．基底というのは，生成系から $\boldsymbol{0}$ を除いたもの全てをいうのですか？

答．すこし違います．勝手な生成系から，その生成する部分空間を減らさないようにベクトルを除けるだけ除いて得られるものです．

問．基底のベクトルは単位ベクトルである必要はないのですか？

答．必要はありません．もちろん，さらに良い性質をもつ基底を選ぶ，というのは大事な作業になりますが，基底の定義自体は「１次独立な生成系」ということだけです．

問．基底はどうやって見つけたらよいのでしょうか？

答．L から零でないベクトル $\boldsymbol{a}_1$ を選び，そこに，１次独立になるように L からベクトル $\boldsymbol{a}_2$ を選び... という作業をできるだけ続けていけば見つけられます．(p.8 最後の行から p.9)．

問．「生成系」というのは，それらの１次結合ですべてのベクトルが表されてしまう，ということだと思っています．だとしたら，それらは１次従属の可能性もあるんですよね．そして，その特別な場合 (１次独立であるという時)，生成系が基底と呼べる，ということなのでしょうか？

答．その通りです．

問．基底は２組以上あるのですか？// 基底のベクトルの個数はどんな基底でも一定ということですが，その組は無限にあるのですか？//

答．無限にあります．

問．演習プリント No.3 について説明して下さい．// 最初に $x_1 = 1, x_2 = 0$ とおいているのが良くわかりません．勝手に決めていいのですか？// 簡単のために "0" を使ったのでしょうか？// 基底は解答例の他に何が可能でしょうか？// 違う答えが出た時に，それが正しいか調べる方法を知りたいです．

答．基底を１組見つけて，それが基底であることを示せば良いので，勝ってに決めてよいです．解答例ではなるべく簡単なものを見つけました．他にも基底はあります．違う答えでも,「１次独立」なことと，L を「生成」することをチェックすれば良いわけです．

問．１次独立の簡単な証明は必ず必要ですか？

答．「基底であることを示せ」という場合は，すべての条件を確認する必要があります．省略してしまうと,「定義を知らない」とか,「それを確認する能力がない」などと疑われかねません．もちろん，その先のことを問題にする場合は，バランス上，証明を省略することがあります．

問．次元とは何ですか？// 部分ベクトル空間の次元とは，イメージ的に何ですか？// 次元は変数の数ですか？

答．部分ベクトル空間 L の次元とは L の基底のベクトルの個数です (p. 13)．イメージ的に，次元とは，その部分空間の拡がり具合です．その上を動ける自由度です．その部分空間を表すのに必要な任意定数の個数です．本質的な変数の数と言えるかもしれません．あくまでイメージの話ですが．

問．生成系という言葉の役割は何ですか？// 生成系の「系」とは何なのですか？//「定理」や「命題」と同等にあつかっている本もあって混乱しています．

答．調べている部分ベクトル空間に属するベクトルの集まりに対する呼び名です．いわば「全国代議士会」のようなものです．ところで，生成系の「系」は，たとえば，太陽系の「系」と同じ意味です．英語では system です．確かに数学では，それとは別に，定理から簡単に導かれる正しい命題を「系」と呼びますが，それは英語で Corollary と言います．まったく違う用語です．

問．$L = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; x_2 = 0 \right\}$ で，$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ではダメなのですか？

答．良いです．基底であることを示せば大丈夫です．

問．条件に $\mathbf{R}^3$ があるのに，L の次元が 2 にどうしてなるのですか？

答. L は $\mathbf{R}^3$ 全体ではなく，その一部分にすぎないからです．３次元空間の中で，２次元的にしか拡がっていないからです．

問. $\mathbf{R}^3$ のときに次元が 1 になる部分空間の例を提示してください．

答. $x_1 = 0, x_2 = 0$ で定まる $\mathbf{R}^3$ の部分集合は 1 次元部分空間です．

問. ある座標系の基本単位となっているのが部分ベクトル空間の基底で，座標を入れるのに必要なベクトルの個数が次元であると解釈しましたが，これでよいのですか？

答. その通りです．

問. 「座標」とはどういう意味ですか？

答. 部分ベクトル空間の要素 (ベクトル) を一意的に表す数値，という意味合いです．

問. 教科書に「何通りもある基底たちは，互いに１次結合で１通りに表されあう，という密接な関係にある」と書いてあるのですが，よくわかりません．

答. 講義で説明します．

問. なぜ基底や次元といった概念が必要なのでしょうか？// 次元がわかると何かいいことがあるのですか？

答. 良いことがあります．次元がわかると，部分空間の大きさが比べられます．

問. $\mathbf{R}^m$ の部分ベクトル空間の場合，基底の数は m 以下と考えて良いのですか？

答. そうです．L が $\mathbf{R}^m$ の部分ベクトル空間の場合，$\dim(L) \leqq \dim(\mathbf{R}^m) = m$ です．

問. ２個のベクトルで，全ての３次ベクトルを作ることは不可能なのですか？

答. そうです．不可能です．$\mathbf{R}^3$ の生成系は，最低で 3 つのベクトルが必要になります．その最低個数のベクトルからなるような生成系が基底です.「次元が違う」ということは決定的な違いなのです．

問. 部分集合と部分ベクトル空間はどう違うのですか？// 部分ベクトル空間の定義は何ですか？

答. 教科書 p.5 〜 p.6 に書いてあります．

問. 「部分ベクトル空間」がいまだにピンと来ません．あまりイメージを頭の中でふからませる必要はないのですか？

答. どんどん膨らませてください．それと同時に緻密な定義も覚えてください．

問. ３次元空間は，より高次なベクトル空間の部分空間なのでしょうか？

答. そう考えることができます．$\mathbf{R}^4$ の中で，$x_4 = 0$ で定まる部分ベクトル空間は，$\mathbf{R}^3$ と見なされます．

問. 「部分ベクトル空間」と「部分空間」は違うものなのでしょうか？

答. 同じ意味で使います (教科書 p. 5 参照).

問. 部分ベクトル空間の判別がうまくいきません．たとえば，不等式を用いられたときに，仮に「部分ベクトル空間でない」場合，反例を１つあげればこと足りるのでしょうか？「部分ベクトル空間である」場合，どうやって「である」ことを示せばよいのでしょうか？

答. 「でない」ことを示すには，満たされない条件が１つでもあることを示します.「である」ことを示すには，すべての条件が満たされることを示します．

問. ある部分集合が部分空間であるか判断するときについて，かけ算にかかわる条件があるときは，部分空間にならないと思うのですが，これは正しいでしょうか？

答. そうとは言えません．たとえば，$\mathbf{R}^2$ で，$x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 = 0$ という条件で決められる部分集合はどうでしょうか？良く考えると，$(x_1 + x_2)^2 = 0$ となり，$x_1 + x_2 = 0$ という条件と同じになり，部分空間になります．やはり，定義に戻って判定するのが賢明なようです．ただし，条件が同次連立１次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ で与えられれば，部分空間になることは既にチェック済みなので，定義に戻る必要はありません．

問. 行列や行列式は，誰がいつ何のために考えたのですか？行列式は，２次元の場合，平行四辺形の面積，３次元の場合，平行六面体の体積，になるということで，僕は，n 次の行列式の一番直感的な定義は，これらの図形を n 次元に拡張した図形の体積を考えることだと思います．

答. なるほど，よいアイディアですね．ただ，n 次元の「体積」とは何か，ということが問題となるので，3 次元の体積 $\to$ 3 次行列式 $\to$ n 次行列式 $\to$ n 次元の定積，が一般化の流れとしてより妥当だと思います．ところで，行列式は江戸時代の和算家の関孝和が，行列はケーレーという数学者が発見したと言われています．

問. 解の重ね合わせ，ということの解釈は，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ が解なら $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ も解，ということですか？

答. そうです．さらに，$\boldsymbol{x}$ が解なら，そのスカラー倍 $c\boldsymbol{x}$ も解であるということも意味する場合があります．

問. n 次列ベクトルは，n 行 1 列ベクトル，もしくは，n 次行ベクトルと呼んだほうが自然な気がします．

答. なるほど．でも，もともと，横の並びを「行」と呼んで，縦の並びを「列」と呼んで，それを基に行列の型を m 行 n 列と呼んでいるわけだから，縦ベクトルを行ベクトルと呼んでしまうと混乱してしまいますね．日本列島は縦に長いので覚えやすい良い命名なのではないでしょうか？

問. 行列を用いた一次変換と複素数平面の図形の回転の違いは何ですか？

答. 同じものです．表現が違うだけです．複素数平面は $\mathbf{R}^2$ と考えられ，回転は２次正方行列で表現されます．

問. $A \subset B$ の定義は何ですか？

問. A の任意の要素が，B に属するということです．

問. 関数も線形空間になっていて基底や次元も存在すると，ある本に書いてあったのですが，どういうことですか？

答. 関数にも「和」と「スカラー倍」が考えられるということです．(p.26 例 19 参照).

問. ベクトル空間はどのような場面で使われるのでしょうか？物理・化学のどの分野で応用されるのかが，全くわからないです．

答. すべての分野で必要です．皆さんがどの分野に進んでも線形代数は使います．

問. 高校までは公式を使って問題を解いていましたが，大学に入り公式を理解するために証明するようになりました．問題を解くというよりは，証明 (自分で証明しない，できない証明) を理解する勉強をどのようにすればよいのでしょうか？

答. 皆さんのような選ばれた立派なエリートは，与えられた問題を単に機械的に処理するだけでなく，臨機応変にさまざまな事態に対処することが期待されているので，どうしても理論・原則を深く学ぶ必要があります．数学の場合も，大学では理論・原則を中心に学びます．それは誰にとっても簡単なことではないので，安心して勉強してください．数学の証明は，その定理の成立する意味を知るためにあります．がんばって慣れてくれば身につき，一生の財産になります．(有難いことに) 数学には有効期限はありません．ということで，よろしくお願いします．ではまた．