科学技術の世界 (やさしい線形代数と固有値) 質問に対するやさしい回答

No. １１ (２００４年１月９日の分, No. １０ は欠番)　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

やあ，こんにちは．講義時間に回答を渡す機会がなかったので，質問の回答をここに置いておきました．参考にしてください．今回も，すべての質問には残念ながら答られませんでした．(答えづらいけれど，良い質問もたくさんありました)．ご了承ください．今これを読んでいる勉強熱心な君．君の将来は大いに明るいことでしょう．

問． なぜ内積という概念が必要なのですか？

答． 内積というものは，自然発生的に生まれた概念であり,「必要」というか，ともかく”あると非常に便利”な概念です．内積を定めておくと，ベクトルの長さや，２つのベクトルが直交しているかどうかを決めることができて便利です．$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^n$ に対して，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbf{C}^n$ に対して，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = {}^t\boldsymbol{a}\overline{\boldsymbol{b}}$ というのが内積の定義ですが，この内積をつかって，ベクトルの長さは，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ という具合に決められ，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0$ という条件で,「$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ が直交する」ということが決められるわけです．ところで，内積の考え方は，いろいろな分野で使われています．長さを測ったり，角度を測ったりすることは，古代から綿々と行われてきたことであり，重要です．

問． 高校では，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$ で定義されていましたが，これと今日の定義は違うものになるのですか？

答． 同じものです．正確にいうと，内積を定めると，長さが決まり，$\cos\theta := \dfrac{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$ という式で，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の間の角度 θ $(0 \geq \theta \geq \pi)$ を定めます．

問． 「(ベクトル)·(ベクトル) = スカラー」というのがわかりません．

答． ベクトルの内積はスカラーということです．

問． 内積の表現方法で $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ とありましたが，座標と混同してしまわないかと思います．// 内積を表現する方法にいくつも種類があるのはなぜでしょうか？

答． 使うやすいものを使ってください．$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \langle \boldsymbol{a} | \boldsymbol{b} \rangle$ のどの記号も使うことができます．

問． ４次以上の高次元で，直交するとはどんな意味なのですか？”直交”という言葉を変えた方が良いのでは？と思います．// ベクトルの長さは，４次元以上になっても存在するのですか？

答． なるほど，直交というのは言葉の濫用かも知れません．でも，数学ではそれが普通です.「長さ」や「直交」という言葉も，厳密に定義していて，しかも，２次元や３次元の場合と同じ性質をもつので，それを一般に使えば，自由にしかも厳密に考えられるわけです．いろいろな用語がありますが，うまく使えば，**類推が効いて，自由にものが考えられる**ようになります．

問． 例えば，100 次元ベクトル空間で，100 個ものベクトルが直交するなんてことが本当にあるのか，よく分かりません．

答． 本当にあります．抽象的にものを考えているので，扱える世界が広くなっているわけです.「$\mathbf{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ がお互いに直交する」という命題は真であって，その特別な場合として，$n = 100$ をあてはめればよいだけです．何の問題もありません．

問． 正規直交基底というものが何を意味するのかが，まだよくわからないです．// 一般の基底を正規直交基底に変換する目的は何ですか？// なぜ直交化するのですか？直交化法を用いて正規直交系を求めることで，どのようなことに役立つのですか？

答． 「正規直交基底」とは，ある特別な性質を持つ”良い”基底です．その条件とは，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，$(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = 0 (i \neq j), (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = 1$ というものです．たとえると，一般の基底が「庶民」なら，正規直交基底は「貴族」です．

問． 正規直交基底は標準基底よりも”標準”なのでしょうか？// 正規直交基底を求めていますが，標準基底を使えばよいと思うので，正規直交基底をわざわざ考える利点は何ですか？

答． 正規直交基底は，標準基底よりも広い概念です．そして，標準基底は，$\mathbf{R}^n$ にしか存在しませんが，正規直交基底は，内積が定まっていていれば，どんなベクトル空間でも考えられます．内積の与えられたベクトル空間，すなわち**計量ベクトル空間**では，正規直交基底を１つ指定すれば，ある n について，$\mathbf{R}^n$ の標準基底を考えることに対応します．実際，V を n 次元ベクトル空間，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を正規直交基底とすると，V のベクトルは，$\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{v}_n$ と一通りに表されるので，写像 $\varphi : V \to \mathbf{R}^n$ が，$\varphi(\boldsymbol{x}) = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ で定まります．このとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{v}_i, \sum_{j=1}^n y_j\boldsymbol{v}_j) = \sum_{0 \leq i,j \leq n} x_i y_j (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ となり，(φ を通して)，講義で説明した，数ベクトル空間の内積に一致します．

問． 正規直交系は何次元まで考えることができるのですか？

答． 何次元までも考えることができます．現実は無限次元，頭の中も無限次元です．

問． 部分空間には必ず正規直交基底が存在するのでしょうか？

答． よい質問ですね．存在します．直交化法によって，その存在が示されます．

問． 直交化法で，どうして $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{x}_1$ とおくのですか？

答． そう置くのが簡単だからです．

問． 直交化法を用いなくても，直交ベクトルは求められますか？内積が 0 という条件から，ベクトルの成分を求めてもよいですか？

答． もちろん良いです．でも，次元が高くなると，直接計算では収拾がつかなくなってしまうでしょう．

問． 直交補空間はどういうものですか？必ず存在しますか？３次元を例にして教えてください．

答． 与えられた部分空間に対して，そのすべてのベクトルと直交するようなベクトルを集めてきてできる空間のことです．必ず存在します．たとえば，$L = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ に対して，その直交補空間 $L^\perp$ は $L^\perp = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ です．図示して納得してください．

問． 複素ベクトルの内積の，$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})}$ がわかりません．

答． $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^n b_i \overline{a_i}$ であり，$\overline{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})} = \overline{\sum_{i=1}^n a_i \overline{b_i}} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i \overline{b_i}} = \sum_{i=1}^n \overline{a_i} b_i = \sum_{i=1}^n b_i \overline{a_i} = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ となります．

問． 複素ベクトルの場合も，長さが実数となるのでしょうか？

答． 長さは実数になります．実際，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^n a_i \overline{a_i} = \sum_{i=1}^n |a_i|$ は，0 以上の実数なので，$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$ も 0 以上の実数になります．

問． ユニタリ行列とは何ですか？

答． $A^* A = A A^* = I$ となる正方行列です．ここで，$A^* = \overline{{}^t A}$ です．

問． $\|\boldsymbol{a}\|$ と $|\boldsymbol{a}|$ は違いがあるのですか？

答． 記号の違いだけです．

問． 内積の定義は，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$ というものでしたが，積分を使った定義もある，というようなことを学んだことがあります．// 内積の条件をみたすものに共通なものをどのようにイメージすればよいのかわかりません．

答． 内積の条件とは，(実数上の場合なら)，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$, で等号は $\boldsymbol{a} = 0$ の場合で，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$ で，$(c\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = c(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ で，$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$ である，というものです．いろいろな計算は，この性質だけを使ってできるので，この条件をみたすものについては，従来の内積について成り立つことが成り立つので，やはり「内積」と呼ぶにふさわしいということです．

問． ガウス平面とは何ですか？

答． $\mathbf{C}$ のことです．複素数平面ともよばれます．

問． 部分空間であるかどうか調べる時の問題は，具体例だけで証明すれは良いのですか？１つの具体例で成り立たないのだから，それは反例であるということになって，証明終了，として良いのでしょうか？

答． その通りです．部分空間の条件がすべて成り立つのが部分空間で，その条件が，１つでも成り立たない，成り立たない場合があれば，条件を持たしていないのだから，部分空間ではない，ということです．

問． ガウスさんが発見した定理は，すべてガウスの定理なのですか？

答． そうです．たくさんあります．

問． 何のために表現行列を考えるのですか？

答． 線形写像や線形変換を行列で表現するためです．

問． 線形写像の核を考えることで，何がありがたいのかよくわかりません．

答． 線形写像をよく調べてみようと思うと，避けて通ることができないから考えます．

問． 鏡映とは何ですか？

答． 鏡に映すことです．３次元なら，面対称で，２次元なら線対称です．

問． 対角行列は一通りしかないのですか？

答． 固有値の並べ方を除けば一通りです．

問． 正方行列の正則行列による対角化と，実対称行列の直交行列による対角化の関連性について気になります．

答． 関連があります．直交行列は正則行列なので，実対称行列の直交行列による対角化は，一般の対角化の特別な場合になります．

問． 行列の三角化に関し，定義とその利用法について知りたいです．

答． A を n 次正方行列とするとき，正則行列 P を見つけて，$P^{-1}AP$ が上三角行列になるようにすることです．幾何的に言い換えると，線形変換 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ に対し，f-不変な部分空間の列 $V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbf{R}^n$, (ただし，$\dim V_i = i$) を見つけることです．利用法はいろいろありますが，たとえば，線形微分方程式を解く時に応用できます．

問． 行列は微分可能なのでしょうか？

答． 「行列値関数」に対しても，微分可能かどうかを考えることができます．

問． 線形写像 $f : V \to V'$ (V と V' の次元が違う場合) について固有値みたいなものはないのでしょうか？

答． いろいろ試みられていますが，固有値のように有用なものはないようです．

問． 私は物事の本質を見抜けません．どうしたら物事の本質を見抜けますか？

答． あきらめずに，よく見ることです．ついでに，回りの状況もよく見ることです．ちなみに，私 (石川) の自戒の言葉は「見逃さない，手を抜かない，こだわらない，あきらめない」です．何度も見逃しているので，もう見逃してはいけない．いつも手を抜いているので，もう手を抜いてはいけない．何かとこだわりがちだから，もうこだわってはいけない．何度もあきらめようと思うが，絶対にあきらめない．ではごきげんよう，さようなら．