科学技術の世界 (やさしい線形代数と固有値) 質問に対するやさしい回答

No. １ (２００３年１０月１０日) の分　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

おはようございます．こんな感じで質問の一部に回答していく予定です．ただし，すべての質問には答られませんでした．また，紙面では回答しづらい質問もあります．ともかく，回答もれのある場合，納得できない場合は，直接質問し直してください．なお，文体を統一するために質問の文章を一部変えてあります．ご了承ください．それから，連絡事項ですが，しばらくの間，教室は E201 を使います．

問．１次独立の「１次」とは何を表しているのですか？

答．１次独立の「１次」は,「線形」(linear) という意味です．つまり「線形的に考えて独立」というのが，１次独立ということです．これは，方程式の次数が１次 (first order) ということが語源であり，次元が 1 (one dimensional) というのとは語源が違います．紛らわしいので少し注意しましょう．

問．線形とは，どういうことですか？

答．一言では言えないのですが，言うとすると「まっすぐ」という言葉がピッタリします．詳しい定義については，ゆっくり説明していく予定です．

問．１次独立とは図形的にいうとどういうことになるのですか？１次独立であるベクトルの数に限界はありますか？

答．１次独立というのは，いくつかのベクトルの組に関する形容詞ですが，図形的にいうと，そのある一部分のベクトルたちが張る平らな部分空間 (部分ベクトル空間と言います) に，全部のベクトルが含まれることがない，ということです．m 次元ベクトル空間では，１次独立なのは m 個のベクトルまでです．

問．１次独立とは「ベクトルが互いに同じ向きを向いていない，又は，零ベクトルが無い」こととイメージしてよいのでしょうか？

答．２つのベクトルに関しては，その通りです．３つ以上のベクトルの組については，場合分けすると同じように説明できますが，簡潔なのは，やはり定義や定理 (判定法) の条件ですね．確認のため定義を書くと「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立 $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} c_1\boldsymbol{a}_1 + c_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + c_r\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ とおくと $c_1 = 0, c_2 = 0, \dots c_r = 0$ が導かれる」ということです．(教科書 p.2 参照).

問．どうして零ベクトルと他のベクトルは１次独立でないのですか？// 同じ方向へのベクトルが独立でないのは何故なのですか？

答．$\boldsymbol{a}_1 = \boldsymbol{0}$ とすると，たとえば，$c_1 = 1$ として $1\boldsymbol{a}_1 + 0\boldsymbol{a}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{a}_r = \boldsymbol{0}$ が成り立つので，１次独立ではなく，したがって１次従属です．また，たとえば，$\boldsymbol{a}_1 = 3\boldsymbol{a}_2$ という関係があれば，$1\boldsymbol{a}_1 - 3\boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{0}$ と書き換えられるので，定義から１次独立ではありません．

問．「$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ が１次独立ならば，$\boldsymbol{a}_1 = s\boldsymbol{a}_2 + t\boldsymbol{a}_3 (t, s \in \mathbf{R})$,,,」のどこが間違っているのでしょうか？

答．逆だからです．つまり，$\boldsymbol{a}_1 = s\boldsymbol{a}_2 + t\boldsymbol{a}_3$ という関係式があると，１次従属になります．というのは，式を変形すると，$\boldsymbol{a}_1 - s\boldsymbol{a}_2 - t\boldsymbol{a}_3 = \boldsymbol{0}$ となり，$c_1 = 1, c_2 = -s, c_3 = -t$ について成り立つので，１次独立ではないからです．

問．１次独立なベクトルにベクトルを１つ足すと１次従属になるのはなぜですか？

答．場合分けする必要があります．１次独立なベクトルの張る空間の中に１つ足すと１次従属になりますが，１次独立なベクトルの張る空間の外に１つ足しても１次独立のままです．(教科書 p.5 参照).

問．ベクトル空間の「空間」の意味がよく分かりません．

答．英語で言うと space です．幾何的な広がりのことです.「集合」というものと似ていますが，物理的な空間をイメージし，それを概念として，もう少し一般化したものという感じで捉えておくと良いと思います．

問．１次独立 (１次従属) の判定法について説明してください．//「r 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r$ が１次独立 $\Leftrightarrow$ $(\boldsymbol{a}_1, \dots, \boldsymbol{a}_r)$ の階数が r」の証明が欲しいです．//「階数」という言葉の意味が理解できません．// 演習プリント No.1 の行列式を使った１次独立の判定法の解説をお願いします．// 行列式を求めれば１次独立か１次従属かがわかるのはなぜですか？// $\det A \neq 0$ で，A が正則行列になるというのがわかりません，というか，忘れてしまいました．

答．講義で説明します．

問．演習で，列を入れ替えても答えは変わりませんか？//

答．行列式の符号が変わるだけなので，正則かどうかは変わりません．

問．どうして行列式というものがあるのですか？//

答．行列式は，ベクトルの張る平行四辺形の面積，あるいは平行六面体の体積という意味があります．その面積とか体積が 0 になってしまうのが，１次従属であるということです．

問．$\det A \neq 0$ と A が正則行列であることが同値なのはなぜですか？

答．m 次正方行列 A が正則であるという条件は，その階数が m ということで，いわゆる基本変形を繰り返していくと，単位行列まで変形できる，という条件ですが，その過程で，行列式が零であるかどうかは変わらないので，結局，行列式が零でない，という条件になります．

問．１次独立か否かという判別についてですが，これは，黒板でやったやり方以外でもできると思います．

答．その通りです．できます．講義でも説明したいと思います．

問．$\mathbf{R}^n$ で n が 4 以上の場合は，いったいどうなるのですか？// 次元を構成する要素で「長さ」「奥行き」「高さ」「時間」以外の要素はあるのですか？ //

答．たくさんあります．古典的な物理の話題に限っても，位置 (３次元) や時間 (１次元) 以外に速度 (3 次元) も問題になります．合わせて７次元になります．(多体問題ならもっと次元が増えます)．ところで，物理以外でもベクトルは利用されています．経済，工学，生物，医学などの，特に統計に関係する分野 (多変量解析) では，高次元ベクトルを自由に扱います．複雑なものを扱うので，たくさんのパラメータ (次元) が必要になってくるのです．

問．次元はどこまで表現可能ですか？ // $\mathbf{R}^{100}$ にはどういう意味があるのですか？// 現実的に使用価値のあるのは何次元までですか？// m 次元のベクトル空間を考えるのに意味がありますか？生活の還元できる分野では，どんな分野がありますか？高次元のベクトルを用いる世界とは，どのような世界ですか？// 4 次以上の数ベクトルは，どのような場合に用いられるのですか？// ５次元から先はどのような軸が加わってくるのでしょうか？//

答．どこまでも表現可能です．いくらでも意味をただし，利用する人が，自由に意味付けをすることができます．数学の特長の１つに「汎用性」があります．数学はいろいろな分野に応用できます．数学では，いろいろな意味を考えら

れるように，わざと「無色透明」な理論を作ります.「好きな色に染めてください」という感じです.「意味は後からついてくる」ということです. (だから，数学は，自分なりにいろいろ意味をつけながら理解していかないと難しい). この状況を，ベクトルの次元ではなく，自然数そのものでたとえてみましょう. われわれは日常でいろいろな数を毎日使っていますが，考えてみると，いつ使うかもわからないような大きな数も，あらかじめ作られていますね. たとえば，10^{10} (11 桁の数) は，ふつうの日常生活では関係ないですが，金額だすると，大企業の経営者なら使います. 10^{100} (101 桁) くらいの数も，宇宙について考えたりするときは，ないと困ります. なぜ，そんな大きな数もあらかじめ準備しておくかというと，**いつ使う必要が生まれるか，誰も予断できない**し，**考えない方が不自然だから**です. それと同じことです.

問. n 次元と言われるとイメージするのが難しいですが，私はこのように例えて考えています：ゲームの主人公は，体力，素早さ，魔力，攻撃力，など様々な物理量で表されています. すべてが独立だとすると，この主人公は「体力，素早さ，魔力，攻撃力の 4 次元空間の 1 点として表される」と解釈できます. また，3 次元空間内を動く n 個の点の動きは「$3n$ 次元空間内の 1 点として表される」と解釈しています. これは妥当でしょうか？

答. 妥当です. すばらしい.

問. ベクトルの定義は，たし算とスカラー倍が定義できるものと考えてよいのですか？// ベクトルはたし算とスカラー倍できるものと定義した場合，ほとんどの数はベクトルとなってしまうと考えて良いのですか？// ベクトルとはそもそも何ですか？// 行列はベクトル空間ではないのでしょうか？

答. そうです. 数 (スカラーと言います) もベクトルの一種です. 1次のベクトルと考えられます. ベクトル空間の厳密な定義は，教科書の補足 B (p.23) にあります，参考にしてください. ベクトル空間の点はベクトルとよぶことができます. 行列の全体もベクトル空間と考えられます. (教科書 p.25 参照).

問. 行列 (線形代数) はどういう分野で必要なのですか？// 線形代数と他の分野の関係がよくわかりません. 今まで線形代数的な話をあまり聞いた気がしません. 量子力学で固有値という言葉が出てきたのが唯一だと思います. // 社会でどのように利用されているのですか？// 仮想の世界の数学のような物が，どのように役に立つのですか？

答. 行列は，統計でも会計でも制御理論でも統計力学でもシステム理論でも必須です. つまり，仮想だから (分野にとらわれずに) 役に立つということがあります.

問. n 次の行ベクトルは $\mathbf{R}^n$ の元ですか？どうして列ベクトルだけを数ベクトルというのですか？// 行列の形をしたものを何故 “ベクトル” と呼ぶのか疑問です.

答. 単に「縦書き」と「横書き」の違いです. もちろん，縦書きの文庫本が途中から横書きになると混乱しますが，統一している限り，どちらで書いても中身は同じです. ここでは，まず列 (縦) ベクトルで統一しましょう.

問. スカラー倍のスカラーに虚数は含まれるのでしょうか？// ベクトル空間は $\mathbf{R}^n$ だけで表されるものなのでしょうか？// $\mathbf{C}^n$ についても独立の定義は同じですか？

答. 実数の場合を説明しましたが，複素数 (虚数) の場合も同じです. 同じ定義です.

問. 次元が増えると，極座標はどういうあつかいになるのですか？

答. 極座標は３次元の場合「球面座標」というものになります. ２次元でも３次元でも，共に，線形な変換式では表されません (３角関数が必要).

問. 「成果は勉強時間に関して線形か？」という質問の答えの “短期的には YES” の横に「微分」と書いてあった意味がわかりません.

答. 微分を使って微視的 (つまり短期的) に見れば，という意味です. 長期的には，スランプに陥ることもあるかも知れないので.

問. f を x の関数として $\dfrac{df}{dx}$ の df と dx は独立なものとして考えてよいのですか？

答. 従属しているものと考えると良いです. $df - f'(x)dx = 0$ という自明でない関係式を持つからです.

問. 無理数はどういう記号で表されるのでしょうか？

答. 強いて書くとすると，$\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ です.

問. 実数，自然数，整数，有理数は現実に存在するわけではないのですか？// 実数，自然数，整数，有理数の数学的定義は何ですか？

答. 何が「現実」で，どういう状態が「存在する」か，ということは議論があると思いますが，素朴に考えて,「数」は仮想的なものです. 極端な話，数字の $1, 2, 3, \ldots$ も現実にどこかにあるのものではなく，便宜的に人間が考えだしたものです. もし，街角を数字の 1 が歩いていたら教えてください. 現実には存在しないので，厳密な定義が必要になります. ここで長々と説明することは差し控えますが，自分で調べる (あるいは直接質問する) ことをお勧めします.

問. 線形代数学を学ぶ上で，集合論を学ぶ必要がありますか？

答. 特に必要はないと思います.

問. $\mathbf{R}^n$ の n に負の数や，小数，分数などの自然数以外の数を入れることは可能ですか？

答. 可能性がないとは断定できませんが，いままでに考えられたことはないし，考える必然性はないと考えます. ただし，別の意味で，次元が分数，という概念は使われています.

問. $\mathbf{R}^\infty$ はどう定義したらよいのですか？

答. 無限数列全体の集合と定義できます.

問. 数学が苦手なのですが，“優 ” を取るにはどうしたらよいですか？

答. 努力すればよいと思います. 半年という短期的な視点でいうと，成果は努力に関して線形だと考えられます. もちろん，努力が足りないとうまくいかないかも知れません.

問. 0 点だと出席点にすらならないということですか？

答. 残念ながらそうです. 質問がない，というのは，講義に集中していなくて，講義内容が一言も理解できず，質問したくても手も足もでなかった，と疑われ，従って，講義に出席しているとは言い難かった，と誤解されてしまうからです. なるべく，0 点は付けたくありませんが...

問. 質問に対して評価をつけることは不適切だと思います.

答. 確かに，質問の善し悪しを評価するのは適切でないかも知れません. しかし，皆さんのする質問の仕方によって，皆さんの理解度，関心度をある程度判定できると考えられるので，あくまで，総合評価のための１つの要素として評価します. ただし，通常は「標準」として評価するので，あまり気にしないで，どんどん数学的な疑問をぶつけてもらえると，受講する意義も増加すると思います. 期待していますので，今後ともよろしくお願いします.