

補足プリント 科学技術の世界 (やさしい線形写像と固有値)

担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 1 (西暦 2003 年 12 月 15 日)

【フィボナッチ数列の一般項の求め方と線形変換の固有値】

漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

$(a_0 = 0, a_1 = 1)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ はフィボナッチ数列と呼ばれ有名です. 具体的に

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

となっていくますが, このフィボナッチ数列の一般項を式で表してみましょう.

線形変換と固有値の考え方を適用するのが, スマートな解法です.

漸化式から,

$$\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

と表されます. したがって,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

だから, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とおくとき, A^n が計算できればよいわけです.

A の固有値を求めましょう. 固有方程式 $\begin{vmatrix} t-1 & -1 \\ -1 & t \end{vmatrix} = t^2 - t - 1 = 0$ を解いて,

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

を得ます. これらが A の固有値です.

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

とおきます.

蛇足: $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ は黄金比とよばれている数です.

さて、2次正則行列 P で $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ (対角行列) となるものが見つかったなら、
 $A = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1}$ なので、

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \cdot P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \cdot P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} P^{-1} \cdots = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}^n P^{-1} \\ &= P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} \end{aligned}$$

となり、 a_n を求めることができます。

さて、固有値 α に対する固有ベクトルは、
 $\begin{pmatrix} \alpha-1 & -1 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ を解いて、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$ (のスカラー倍)、
 $\begin{pmatrix} \beta-1 & -1 \\ -1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ を解いて、 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ (のスカラー倍)、
 となることから、 $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ を得ます。このとき、

$$P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

なので、

$$A^n = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}, & -\alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n, & -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n \end{pmatrix}$$

となります。したがって、

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1}, & -\alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n, & -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n \end{pmatrix}$$

となり、結局、

$$a_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right\}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

とフィボナッチ数列の一般項が、めでたく求まりました。おしまい。