数学序論 E (ベクトル解析) 質問に対する回答

No. 3 (２００５年１月１３日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

連絡事項：１月２７日 (木) に，テスト (９０分) を行う予定です．持ち込み不可．試験範囲は，６，７，８章とします (ただし，５章までの概念・記号は自由に使うので復習しておいてください)．
もし回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問．ガウスの定理や**グリーンの定理**は，どのような時に使うのでしょうか？// この公式は何のためのものなのか，何で必要なのか等，原理がつかめません．// ガウスの発散定理やグリーンの定理の物理学的意味はなんですか？

答．線積分を面積分を使って求めたり，逆に面積分を線積分を使って求めたりするのに使います．これらは，いろいろな物理法則を導くのに有用です．教科書の p.4 から p.5 あたりを参考にしてください．教科書にあるように,「微分形と積分形にはそれぞれよい面があり，その間を自由に行き来するためのパスポートが積分公式」です．微積分の基本定理のように基本的で有用な定理です．

問．グリーンの定理の直感的イメージがつかめません．// グリーンの定理を直観的に考えると，どのような感じでとらえたらよいのでしょうか？ガウスの定理は「領域 D の水は D の中で湧き出した分だけ境界 ∂D を通って出ていった」というように記述されており，発散が意味する「水の湧き出し」とリンクして意味をとらえやすいのですが，グリーンの定理には，このガウスの定理のような「台風や竜巻，流しの排水やトイレの水を流すときに見られる渦巻」とリンクした意味はあるのでしょうか？

答．内部にどれぐらい渦があるか，その渦度の積分が，境界上の情報だけでわかる，境界上の線積分で計算される，という意味です．

問．ガウスの定理やグリーンの定理を使える条件は何ですか？発散や渦度が求められればよいのでしょうか？

答．境界が (有限個の点を除いて) 滑らかな有界領域 D 上の少なくとも C^1 級のベクトル場 $\boldsymbol{V}$ に対して適用されます．その場合，発散や渦度が求められ，その積分も存在します．

問．ガウスの定理やグリーンの定理を使って計算する時，領域に穴があいている場合，計算はどうなりますか？

答．境界がいくつかに分かれている場合は，それぞれの線積分を計算してからたし合わせます．グリーンの定理の場合は，境界の向きにも気をつけます．たとえば，円環領域の場合，外側の境界は反時計まわり，内側の境界は時計まわりに積分します．領域の外側を右手に見る方向に進みます．

問．領域の境界の「向き」の決めかたがよくわかりません．

答．「向き」がわかるかどうかには “向き不向き”がある，と聞いたことがあります．それはともかく，領域の外側を右手に見る方向に進んで積分します．

問．ガウスの定理が使える領域の条件はどのようなものなのでしょうか？たとえば，ある平面領域から線分を除いた領域には，ガウスの定理を使っていいのでしょうか？// フラクタル図形など，三角形を細かくしていくだけでは境界を近似することができないものもあると思います．

答．なるほど．それから，いくつかの点を除いた領域などもあり得ますね．その線分や点の上までベクトル場がなめらかに拡張できる場合なら，もとの平面領域に対してガウスの定理が適用されます．しかし，その線分や点の上でベクトル場がなめらかでなかったり，定義されていない場合は，いわゆる広義積分として扱う必要があります．また，フラクタル図形など，長さが求められないような曲線の場合には，もちろん適用できません．(まず公式自体の意味が不明確になる)．

問．ガウスの定理における $\boldsymbol{n}$(単位法線ベクトル) はどのよう決めるのですか？

答．２次元の場合は，境界は曲線なので，その単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ を，外向き法線方向に９０ °回転すれば得られます．３次元の場合，境界は曲面なので，以前説明した方法 (p.64 参照) で $\boldsymbol{n}$ が求められます．

問．平面上のガウスの定理の説明のところで，$\sum_i \int_{\partial T_\varepsilon^i} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds = \sum_i S_\varepsilon^i \nabla\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O(\varepsilon^2)$ の $O(\varepsilon^2)$ になることがわかりません．// 微小三角形の総数がなぜ $O(\varepsilon^{-2})$ になるかということと，そうするとなぜ最後の誤差項が $O(\varepsilon^2)$ になるのかというかという関係がわかりません．// ランダウの記号 O の意味と使い方が未だによくわかりません．

答．まず，縦横それぞれ長さ ε の正方形で分割することを考えます．領域に含まれる正方形の個数を N_0 とし，領域と共通部分をもつ正方形の個数を N_1 とすれば $N_0\varepsilon^2 \le S \le N_1\varepsilon$ ですね．ここで S は領域の面積です．領域が**面積確定**とは，これらの差が $\varepsilon \to +0$ としたとき，どんどん 0 に近付くということです．それはともかく，$N_0\varepsilon^2 = \dfrac{N_0}{\varepsilon^{-2}} \le S$ が有界なので，N_0 は $O(\varepsilon^{-2})$ と表されます．記号の乱用だ，と言えなくもないけれどね．それぞれの正方形を２つの三角形に分割すれば，三角形の個数は，$2N_0$ でやはり ε^{-2} で割って有界なので，同じく $O(\varepsilon^{-2})$ という記号で表示されます．それはともかく，$O(\varepsilon^4)$ と表される式 h と $2N_0$ をかけてみましょう．すると，$\dfrac{h\cdot 2N_0}{\varepsilon^2} = \dfrac{h}{\varepsilon^4}\dfrac{2N_0}{\varepsilon^{-2}}$ は有界です．(ここで，$\dfrac{h}{\varepsilon^4}$ が有界であることに注意しましょう)．したがって，$h\cdot 2N_0$ は $O(\varepsilon^2)$ と表されるわけです．ちなみに，$O(\varepsilon^n)$ と $O(\varepsilon^m)$ をかけると，$O(\varepsilon^{n+m})$ となります．

問．$\int_{\partial D_\varepsilon} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds = \sum_i S_\varepsilon^i \nabla\cdot\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r}_i) + O(\varepsilon^2)$ で $\varepsilon \downarrow 0$ とすると，$\int_{\partial D} \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds = \int_D \nabla\boldsymbol{V}dS$ が得られるのはなぜですか？// 右辺は「重積分の定義」である，とのことですが，重積分の定義式は $\int_D^f (x,y)dS$ だった様な気がします．

答．$f = \nabla\cdot\boldsymbol{V}$ に重積分の定義をあてはめています．教科書 pp.91–92 を参考にしてください．

問．グリーンの定理とガウスの定理の説明で，三角形で分割していますが，四角形で分割するとそういうことになるのですか？三角形でなくては説明がつかないのですか？

答．三角形で分割した理由は，**曲線の長さの定義** (p.70) にあります．境界を折れ線で近似して，その折れ線の長さの極限として境界の長さが定義されます (線積分も同様)．その際，折れ線の角の点はすべて境界になければいけません．たとえば正方形だけで分割したら，折れ線の角が境界の外に出ます．三角形を使えばそこがクリアできるということです．(面積の近似なら微小正方形による分割でよいが，境界の近似には三角形を使う必要がある，ということ)．

問．微小な三角形のとり方に依らないのでしょうか？

答．依りません．左辺は，境界の長さが確定するということから，近似のとり方によりません．また，右辺は，三角形分割したものを微小正方形でさらに細分する，ということを考えると，重積分に近付くということが，(重積分の存在から) わかります．

問．教科書 p. 174 の問題 8.2 がわかりません．領域 D の面積を S とするとき，$S = \frac{1}{2}\int_{\partial D} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{n} ds$ であることを示すことができません．$\nabla \cdot \boldsymbol{r} = 2$ になるというのが分かりません．

答．ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ が，特に $\boldsymbol{r} = (x, y)$ の場合なので，発散は $\nabla \cdot \boldsymbol{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 1 + 1 = 2$ です．

問．教科書 p.149 の問題 6.6, 問題 6.9 が何度やっても答えにたどりつけません．

答．文面だけからは，どの部分の計算が合わないのかわからないので，どこに問題点や誤解があるのかわかりませんが，たとえば，6.6 (1) なら $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$ なので，$\nabla r = (\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y})$ であり，$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}(2x) = (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}}x = \frac{x}{r}$ であり，同様に $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{y}{r}$ なので，$\nabla r = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r})$ になります．もう一度，基本的な定義と合成関数の微分を復習して，**丁寧に**計算し直してみてください．

問．「〜をみたすのはどの様な関数のときか」という問いに対しては，それをみたす関数を１つ挙げるだけでは不十分でしょうか？

答．不十分です．確かにあいまいな設問ですが，それをみたす関数を**全部**列挙するか，別の性質で特徴付けることをが期待されています．たとえば，「$\frac{dy}{dx} = 0$ をみたす $\mathbf{R}$ 上の微分可能な関数 $y = y(x)$ はどの様な関数のときか」と聞かれたら，$y = 1$ では不十分で,「$y = c$ (c は任意定数)」と答えたり,「y は定数関数」と答えたりしなければなりません．

問．回転の定義の説明がよくわかりません．回転の正の向き，負の向きはどのように決まるのですか？

答．回転の成分が，各座標軸のまわりの渦度である，というところですね．x 軸のまわりは $y - z$ の向き，y 軸のまわりは $z - x$ の向き，z 軸のまわりは $x - y$ の向きで考えます．$x - y - z$ を巡回的 (cyclic) にまわしていくと見やすいと思います．

問．回転はどのようなことに使えるのですか？

答．３次元空間の曲面に関する「ストークスの定理」に登場します．

問．面積分がよく理解できません．

答．教科書 pp.90–91 の説明をもう一度読んでみてください．

問．保存場は何を保存しているのでしょうか？

答．「力学的エネルギー」です．教科書 p.144 を参考にしてください．

問．grad, div, rot が混ざった計算は，rot·grad$f = 0$ 以外講義で紹介されないのでしょうか？たとえば $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V})$ のような式を変形する問題は，定義通りに計算していれば良いだけなのですが，Gauss の定理を使える形に変形できる，など結構役立つと思います．公式として取り上げているベクトル解析の教科書もあるので，重要なのかな，と感じていました．

答．この講義では基本的な公式を優先して説明しているので，知られている公式をすべて紹介することはできませんが，必要が生まれた時点で自力で検証できると思います．たとえば，$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{V}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) - \nabla^2 \boldsymbol{V}$ という公式がありますね (皆さん，自分で確かめてみてください)．重要ですが，講義で紹介したものよりも優先順位が下ということです．

問．教科書は，わかりやすくてよいと思うのですが，厳密でないような気がします．そんなことはないですか？

答．厳密です．適度な範囲で厳密と言えます．もちろん，何をどの程度に厳密であると感じるかについては，個人差があり，また，そのときどきの必要の度合いによって変わってくるものです．たとえば，外国語を習うとき，最初から文法でがんじがらめになっていたら，言葉は身につきませんね．まず馴れること．間違っても良いから使ってみること．もちろん最低限の文法は知らないと話にならないが，詳しいことは必要に応じて後で学んで，自分の能力に磨きをかけていけばよい．それと同じことです．厳密でないと感じたら，自力で厳密な証明をつけてみればよいだけのことです．心配無用ですね．

問．問題の解法について,「勾配に渦なし」ということを授業でやりましたが，試験の時は，このように直接書いてもいいのですか？$\nabla \times \nabla \boldsymbol{V}$ を求める場合，最初に「勾配に渦なし」ということを証明した後で使うべきなのですか？

答．設問の仕方 (出題意図) によります．たとえば，$\nabla \times (\nabla f) = 0$ を証明せよ，という問題なら，証明してください．具体例で確認せよ，という問題だったら，具体例を計算するだけで，一般的な証明の必要はありません．とにかく，証明が必要だと判断したら，証明を書いてください．どんな問題が出題されても対処できるようによく準備してください．

問．この授業の中で，非常に多くの式が出てきたのですが，どれがおぼえておくべき式で，どれがその都度計算して導けばよい式か，わからなくなってきました．テスト前に，どの式をおぼえておけばよいか，まとめていただけると助かります．実際，大半の式が計算で求められるはずですが，かなり計算が大変そうな式もあります．

答．まず，勾配や発散や回転 (渦度) の定義を覚えてください．その意味も理解しておいてください．それから，積分公式 (４つ) は全部覚えてください．その公式に出てくる記号の意味も含めて全部覚えてください．あとは問題をたくさん解いてください．それだけでよいです．それ以外の教科書にある式を使う問題を出題するときは，必ず，ヒントとして問題文に式を載せます．

問．等式を導く上で考えなければならない証明について，全て理解すべきなのでしょうか？テストを受けるだけならば，定理などは結果のみを理解できれば点は取れますし．ガウス，グリーンの定理の証明があまり理解てきなかったので．

答．理解できるなら理解してください．理解できないときは，とりあえず，問題を解いて，その定理なり公式なりの使い方に馴れることを優先してください．点をたくさんとってください．でも，余裕があれば (試験後でもよいから) だいたいの証明の道筋だけでも理解していくと，あとあと勉強したことが応用できて楽しいと思います．そうしないと，しばらくしたら習ったことをすっかり忘れて，何も身につかず，ただ単位を取っただけ，ただ年も取っただけ，ということになりかねません．それだとつまらないので．

コメント．授業がわかりやすくて好きです．次回のレポートは復習もかねて，全範囲から出題して欲しいです (問題数もいつもより多めで)．

コメントのコメント．ありがとう．ところで，レポートを全範囲から出題するのは難しいので，今回の授業の範囲に限りました．悪しからず．皆さん，いままでのレポート問題や教科書の問題を各自解いて，よく準備しておいてください．ではよろしく．