数学序論 E (ベクトル解析) 質問に対する回答

No. 2 (２００４年１１月２５日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

連絡事項：１２月９日 (木) は出張のため休講です．また，１２月１６日 (木) には，第２回小テストを行う予定です．

もし回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問．“**ベクトル場が水の流れを表している**と思えば” と教科書に書いてありますが，そもそもこれがわかりません．ベクトル場の上で何が動いているのでしょうか？

答．水がベクトルの方向にベクトルの大きさの分の速さで流れているという「見立て」をしています．**流体の速度ベクトルの場**です．(正確に言えば，流体のある時刻における速度ベクトルの場です)．

問．ベクトル場の図示の仕方がわかりません．

答．たとえば，$\boldsymbol{V} = (x, y) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$ の図示ですが，まず，x 軸方向の基本単位ベクトル $\boldsymbol{e}_x = (1, 0)$ を図示することを考えてみます．これは，xy の各点にベクトル (1.0) が指定されているようなベクトル場ですが，原点から出発するベクトルとして表すと，どの点にどのベクトルが指定されているかわからなくなるので，見てわかりやすいように，各 (x, y) (現実的には，有限個の点を選んで) に，そこから $(x+1, y)$ へ向かうベクトルを書いていきます．$\boldsymbol{V} = (x, y)$ の場合は，(x, y) から $(x + x, y + y)$ へ向かうベクトルを書いていきます．

問．勾配としての “∇” と湧きだしを求める時の “∇” のちがいはどのようなものですか？// ∇ は一方で grad で，もう一方では div とちがう意味で使われています．どのように判断するのかよくわかりません．// ∇ が何を表しているのか，また ∇ がどういう意味でどういう利点があるのかわかりません．

答．２次元の場合は $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ です．３次元の場合は，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ です．どの場合でもそうです．そして，記号を良く見れば区別できるように工夫されています．定義も，記号から類推できるようになっているので安心です．２次元の場合，∇f, $\nabla \cdot \boldsymbol{V}$, $|\nabla\ \boldsymbol{V}|$ と３つの状況で使われますが，見た目の違いは明らかですね．∇ はいわば,「微分したよ」という目印だけですが，目印の付き方で区別があるわけです．“鼻の油”はどう付いても同じだが，∇ (**ナブラ**) **は付き方がとっても大事**ということですね．

問．合成関数の**勾配**がよくわかりません．

答．合成関数 $f(g(x, y))$ の偏微分の公式を使いました．記号の付け方には任意性があるのですが，たとえば，$w = f(z), z = g(x, y)$ とおけば，$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{df}{dz}(z)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$ と表されるわけです．

問．$f = f(x, y)$ において，f が不連続になる点では，勾配 $\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ は定義されないのですか？

答．定義されません．偏微分ができる範囲だけで定義されます．

問．発散がよくわかりません．// 例題の $\nabla \cdot \boldsymbol{V} = 2$ の 2 は何を意味しているのでしょうか？// 発散を求めて，何がわかったり役に立つことはあるのですか？

答．２次元の場合，ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (u, v)$ に対して，$\nabla \cdot \boldsymbol{V} = (\mathrm{div}\boldsymbol{V} =)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ (というスカラー場) が $\boldsymbol{V}$ の発散の定義です．発散の意味は，単位面積あたりの湧き出し量です．発散の 2 は，単位面積あたりの湧き出し量が 2 だということです．発散が -2 なら，単位面積あたりの吸い込み量が 2 だという意味です．ところで，数学では普段，どの単位を考えているか (どのモデルで考えているか) に依らない普遍的な計算をするものなのです．発散は (ほかのベクトル解析の概念とともに) 流体を調べたり，電磁気の性質を調べたりするのに使います．そのような物理現象以外でも，生物科学でも使うし，社会科学でも使います．**数学は普遍的なので役に立ちます**．安心して学んでください．

問．発散の定義にもとづいて計算されたものはグラフ的に発散していなくても発散なのですか？例えば，(教科書の) 図 6.6(c) は収束しているようにしか見えません．

答．ともかくどのベクトル場に対しても，そのベクトル場の発散し具合が計算できます．この場合「発散」というのは，そのベクトル場の特性そのものを表す用語ではありません.「このベクトル場は発散する」とは言いません.「このベクトル場の発散はコレコレである」と使います．講義でも説明したように，すでに習っている数列の「発散」「収束」とは無関係で異質な用語です．

問．発散の性質で $\nabla \cdot (f\boldsymbol{V}) = f(\nabla \cdot \boldsymbol{V}) + (\nabla f) \cdot \boldsymbol{V}$ となっていて，前半の $\cdot$ は記号で，後半の $\cdot$ は本当の内積と説明されたのですが，$\nabla \cdot \boldsymbol{V}$ も $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ と (u, v) の内積で，どちらも内積だと思うのですが．

答．どちらも内積なのですが，$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ はあくまで記号として導入したものであり，普通のベクトルである ∇f や $\boldsymbol{V}$ とは異質なものなので，そのことを指摘して強調したわけです．

問．発散の式を導くところで，$A_1 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} u(x + \frac{h}{2}, y + s)ds$, $A_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -u(x - \frac{h}{2}, y + s)ds$ ですが，積分の方向

が同じなのはなぜですか？

答．なるほど．でも，A_3 は $-u$ を積分するので，同じ方向の積分で，外向きに出る量が計算されます．

問．s の意味がよくわかりません．

答．s は，正方形の１辺を動くパラメータです．$-\dfrac{h}{2} \leq s \leq \dfrac{h}{2}$ です．この場合 ds は以前に説明した「線素」です．

問．発散は正方形の内部を通るベクトルは含めないのですか？

答．含めません．出口 (入口) だけ観察すれば，どれだけ湧いているか (吸い込んでいるか) わかります．

問．$\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\int_{\partial Q_h}\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{n}ds}{h^2}$ のところで，h^2 で割る意味がよくわかりません．// 結果だけ覚えればよいのかも知れませんが，せっかくなので教えて下さい．

答．単位面積あたりの湧き出し量を計算したいので割りました．ところで，結果だけを覚えればよい，というわけではありません．**知識というものは，こま切れではなく，網の目のように増やしていくことが肝心**です．結果だけだとそれだけであって，忘れたらおしまいです．その結果をどう導いたかも知っていれば，意味もわかって応用できるし，他の概念 (渦度，３次元の発散，回転など) との関係もわかるし，最後に扱う，積分公式もよくわかって，だいぶ楽しくなります．

問．勾配，発散，渦度にはどのような関係があるのでしょうか？//

答．「スカラー場やベクトル場から微分によって導かれる場」という仲間です．いろいろな関係式が知られていますが，それはこれからおいおい説明していきたいと思っています．

問．渦度はスカラーですか？それともベクトルですか？

答．スカラーです．スカラーなのですが，xy-平面を xyz-空間の中で考えたときのある法線ベクトルの成分ととらえることもできます．これから説明する３次元ベクトル場の「回転」との関係で言うと，ベクトル場の１つの成分として登場します．

問．divergent の公式を導出したとき，“正方形” の境界で線積分しましたが，正方形でなくとも (測度 0 以外のところで C^1 級である曲線で囲まれた部分の境界を線積分すれば) 同様の結果が得られますか？

答．はい，得られます．まず，たとえば長方形で確かめてみてください．

問．発散は無限次元においても構成可能なのでしょうか？

答．講義で説明したのと同じような方法では無理ですし，また，そのようなものを考える動機がまったくありません．しばらくしてから，もう一度考えてみることをお勧めします．

問．２変数関数の**テイラー展開**がわかりません．

答．$f(x+h,y+k) = f(x,y) + h\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + k\dfrac{\partial f}{y}(x,y) + \dfrac{1}{2}h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) + \dfrac{1}{2}k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) + O(\sqrt{h^2+k^2}^3)$ です．微積分の基本中の基本なので，しっかり慣れておいてください．(最後の項は $O(|h|^3+|k|^3)$ と書いても同じことです)．講義やテキストでは，この h の部分を $\dfrac{h}{2}$ や $-\dfrac{h}{2}$ に，k の部分を s で置き換えて使いました．ちなみに，ランダウの記号の部分は，$O(\sqrt{\frac{h^2}{4}+s^2}^3)$ ですが，$-\dfrac{h}{2} \leq s \leq \dfrac{h}{2}$ なので，h^3 で割って $h \to 0$ としても有界なので，$O(h^3)$ と書き表されます．

問．なぜ，$O(h^3)$ を s で積分すると $O(h^4)$ になるのですか？

答．テキスト p. 127 にあるように，$O(h^3)$ と書き表される関数は，ある定数 M に関して $|O(h^3)| \leq Mh^3$ と表されます．(h^3 で割ったら有界なので)．積分の基本的な性質から，$|\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} O(h^3)ds| \leq \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} |O(h^3)|ds \leq \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Mh^3 ds = Mh^4$ となるので，$O(h^4)$ になります．

問．渦度と Tan^{-1} に関係はありますか？Tar^{-1} から $\dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}dx + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$ から導かれますが，これは渦度の形と似ています．コーシー・リーマンの関係式とも似ています．

答．ほう，なるほど似ていますね．

問．レポート No.5 の 5-1 「楕円面 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{5} = 1$ によって囲まれる領域が $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = 2r\sin\theta\sin\varphi$, $z = \sqrt{5}r\cos\theta$, $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$ と**パラメータ付けられる**こと確かめよ」という問題がよくわかりません．‘パラメータ表示できる’ というには，どのような条件が必要なのですか？// レポートでは，単位球体の中の点と１対１に対応することを用いて言ってみたのですが，それでよかったのでしょうか？他に図を用いて，全ての点を重複することなく満たすといった感じでも確かめられると思いました．解答例を出してください．

答．そうですね．講義中に説明していなかったので難しかったかなと思います．ともかく，r, θ, φ を動かしたときに，指定された範囲上を点が動くこと，その範囲全体をカバーしていること，さらに欲を言えば，この対応がほとんどいたるところで (測度 0 の部分を除いて) １対１になっていることを確認してほしかった問題です．単位球体

の場合と比較するというのはよいアイディアです．解答例：$x' = r\sin\theta\cos\varphi$, $y' = r\sin\theta\sin\varphi$, $z' = r\cos\theta$, $0 \le r \le 1, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi$ は，単位球体 ${x'}^2 + {y'}^2 + {z'}^2 \le 1$ のすべての点をほとんといたるところで１対１に埋め尽くす．したがって，$x = x', y = 2y', z = \sqrt{5}z'$ は楕円体 $x^2 + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{5} \le 1$ のすべての点をほとんといたるところで１対１に埋め尽くす．(この説明に，単位球体と楕円体の図を添える).

問．単位接線ベクトルを用いて，単位法線ベクトルを求める計算は間違いなのですか？

答．間違いではありません．正しい方法です．ただし，そうすると，かなり計算が複雑になり，正しい答えを導くのが難しくなるわけです．それよりも，まず，外積を計算して法線ベクトルを求めてから，それを単位法線ベクトルにする方が，ずっと計算が楽で計算間違いしづらい良い方法なのです．

問．曲面上の面積分の変換公式は，接平面上の平行四辺形の面積で近似していますが，本当にそれでよいのですか？曲面上の全ての点で接平面上の平行四辺形を考えると，面積が少し大きくなりそうです．

答．極限をとる前の段階では，実際の面積と差が出るわけですが，分割を細かくしていった極限値の段階では等しくなります．面積はあくまで極限値です．曲線の長さも極限値です．ところで，円周率を近似計算するアルキメデスの方法がありますね．円周を，その円に (外) 接する正多角形の長さで近似します．この近似値の段階では確かに値が少しおおきめです (アルキメデス).

問．積分変数を変換する際の**ヤコビアン**の意味がよくわかりません．

答．変数変換がひきおこす接平面の変換での「面積の増大率 (あるいは減少率)」を表すのがヤコビアンです．それを掛けて積分すれば正しい答が出るわけです．

問．面積分をなぜそう呼ぶのかわかりません．たとえば，$\displaystyle\int_c^d\int_a^b f(x,y)dxdy$ は立体の体積を表していますが，面積分は体積を表すのでしょうか？

答．面積分というネーミングは，積分して得られる値の意味からそう呼ばれると言うよりも，積分する操作が２次元的 (“面”的) だから，面積分と呼ばれます．面積分は,「面積」分ではなく,「面」積分なのです．同様に，体積分は,「体積」分ではなく「体」積分です．線積分は「線」積分です．

問．４次元以上の次元の**測度**も今までのように積分で求められますか？// 高次の積分 (体積分以上) のイメージがよくわかりません．どのような意味があるのか，具体的な応用例などを挙げて教えて下さい．

答．求められます．たとえば一辺の長さが a の４次元立方体の４次元測度は，$\displaystyle a^4 = \int_0^a\int_0^a\int_0^a\int_0^a dx_1dx_2dx_3dx_3$ です．その意味は，３次元の場合の自然な概念の拡張，ということです．具体的な応用例としては，幾何の多様体論や，確率論や多変量解析など挙げるときりがなくなるほどたくさんあります．それはさておき，たとえ応用などなくても，n 次元単位球の “体積”(n 次元測度) がどうなるか，などということは，知りたくなりませんか？人間は考えるな，と言われても考える生き物なのです．

問．定義を覚えていれば，**イメージ**は必要ないのですか？

答．(1) とりあえず定義を覚えてください．(2) 何度も使って慣れてください．(3) それと並行して，その定義のいろいろな意味を知ってイメージを膨らませてください．(4) そして，そのイメージに囚われないで，いろいろ応用してください．ではまた.