数学序論 E (ベクトル解析) **質問に対する回答**

No.1 (２００４年１０月２１日の分)　担当 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

皆さんからの質問にはこのような形で回答します．もし回答もれのある場合や回答に納得できない場合などは，直接質問し直してください．また，文体を (です，ます調に) 統一するため，あるいは，質問の一部に答えるために，質問の文章を変えて掲載する場合があります．ご了承ください．

問．「**線積分**」という概念がよくわかりません．// 線積分の概念についてもっと教えてください．// 線積分と他の積分の違いが分かりません．

答．「線積分」は曲線に沿った積分の総称です．普通の積分 $\int_a^b f(x)dx$ も線積分の１種です．「重積分」は線積分ではありません．重積分は，これから説明する面積分などに一般化されます．テキストでは，段階的に，曲線の長さ (線素の積分), 密度が一定でない線の質量 (線素のスカラー倍の積分)，ベクトル場の曲線に接する成分の積分 ($\int_C \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$) という流れで導入しています．どれもみな線積分です．一般形は $\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ という形の積分になります．そして，その意味は，$C: \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), a \leq t \leq b$ のとき，$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left(P(x(t),y(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t))\frac{dy}{dt} \right) dt$ です．

問．ベクトル場 $\boldsymbol{V} = (V_x, V_y)$ が理解できません．

答．ここでは，V_x, V_y は，単に，ベクトル $\boldsymbol{V}$ のそれぞれ x-成分，y-成分という意味に使っています．深い意味はない記号です．上の回答では，$\boldsymbol{V} = (P, Q)$ とおいて表記しています．

問．$\int_C \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$ とはどのような意味になりますか？// $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}$ はどのような意味をもつのかわかりません．// 線積分の説明で，$f = \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}$ がよくわかりません．// なぜ $\int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}ds$ なのかわかりません．

答．$\int_C \boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_C \boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}ds$ なので，ベクトル場 $\boldsymbol{V}$ の接線方向の成分 (それが $\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t}$ の意味です．内積の意味のところを参照) の線素による積分という意味になります．たとえば，$\boldsymbol{V}$ の曲線の法線ベクトル場なら，$\boldsymbol{V}$ と $\boldsymbol{t}$ は垂直なので，$\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{t} = 0$ であり，したがって積分は零になります．

問． **線素**というものがどのようなものかわかりません．

答．"味の素" ならぬ "線の素" です．$ds = |\boldsymbol{r}'|dt$ であって，積分すれば曲線の長さを表すものです．ここでは,「**線素による線積分**」$\int_C fds$ (f は曲線 C 上のスカラー場) を説明します．曲線 $C: \boldsymbol{r}(t), a \leq t \leq b$ の $t = a$ から $t = t$ までの長さを $s(t)$ と書き，$s(t)$ をパラメータ t の関数と見ます．(ここでは，曲線の長さが良くわかっているものとします)．曲線を $t = a = t_0, t = t_1, t = t_2, \ldots, t = t_{100} = b$ と 100 個の曲線片に分けて，量 $f(t_0)(s(t_1) - s(t_0)) + f(t_1)(s(t_2) - s(t_1)) + \cdots + f(t_{99})(s(t_{100}) - s(t_{99}))$ を考えます．この量は，曲線片の長さに f という"重み"を付けて総和をとった量です．さらに細かく曲線を分けていったときのこの量の極限値が $\int_C fds$ の意味です．ですから，線素 ds とは何か，というと，極限値の中の $s(t_{100}) - s(t_{99})$ などのような部分の"記憶""痕跡"あるいは"よすが" であるといえます．考えてみると，積分記号の dx とか dy というものも同じ意味あいをもつものです．ちなみに現代では，このような記号は，**コベクトル** (co-vector) や**微分形式** (differential form) として明確に捉えらます．

問．曲線の長さのところで，$|\boldsymbol{r}(t_{n+1}) - \boldsymbol{r}(t_n)| = \sqrt{x'(t_n)^2 + y'(t_n)^2}\Delta t + O(\Delta t^2), (\Delta t \to 0)$ がどのようにしてこうなるのか分かりませんでした．

答．テイラー展開をすればわかります．($\boldsymbol{r}(a+h) - \boldsymbol{r}(a) = \boldsymbol{r}'(a)h + O(h^2)$ が成立)．

問．曲線の長さを積分で求めると誤差がでるような気がします．

答．気のせいです．長さも極限値，積分も極限値として定義されていて等しくなります．

問．新しい記号 $d\boldsymbol{r}$ を使う理由が不明です．// $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}'dt$ ということでよいのですか？

答．その通りです．たとえば $\boldsymbol{r} = (t, t^2, t^3)$ なら $\boldsymbol{r}' = (1, 2t, 3t^2)$ なので $d\boldsymbol{r} = (1, 2t, 3t^2)dt = (dt, 2t\,dt, 3t^2\,dt)$ です．

問．スカラー場 (のスカラー倍...) の線積分に数学的な意味はあるのでしょうか？

答．正確にいうと fds や $\boldsymbol{V}\cdot d\boldsymbol{r}$ のような "微分形式" の積分に意味があります．ところで，微分形式とは何かを端的にいうと，微分形式はベクトル場を入力するとスカラー場を出力する関数です．たとえば，微分形式 $Pdx + Qdy$ はベクトル場 $a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ を入力すると，スカラー場 $aP + bQ$ を出力します．

問．$\int_a^b f|\boldsymbol{r}'(t)|dt = \int_a^b f(\boldsymbol{r}(t))|\boldsymbol{r}'(t)|dt$ の $\boldsymbol{r}(t)$ は何ですか？

答．線積分をするもとの曲線です．これは「関数 f の曲線上の点 $\boldsymbol{r}(t)$ での値」ということを強調した書き方です．

問．$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x}$ となっていましたが，$x \to 0$ だと思います．

答．その通りです．黒板に書き間違えました．

問．法線ベクトルの**正の向き**はどちらになるのでしょうか？正の向きなどは定義しなくてもこれからの話の発展には支障がないということですか？$\boldsymbol{n}, -\boldsymbol{n}$ のどちらも法線ベクトルである，という事は解るのですが．

答．なるほど．講義では，必要になってから説明しようと思っていたのですが，今，説明してみましょう．法線ベクトルの向きを１つに決めるためには，曲面の向きを１つ決めておかなければなりません．曲線の向きとは，接平面の基底の順序を指定することです．曲面 $\boldsymbol{r}(s,t) = (x(s,t), y(s,t), z(s,t))$ の場合，通常 $\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ というベクトルの組を基底に選びます (この順番で)．このとき，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}, \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}, \boldsymbol{n}$ の順番で，$\mathbf{R}^3$ の標準基底と同じ向きを与えるような法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を正であると定めています．

問．法線ベクトルが外積で表されることはわかるのですが，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s}$ ではなく，$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial t}$ と表される理由がわかりま

せん.

答. どちらも法線ベクトルです．どちらかに決めるために s,t の順番を決めていると理解しておいてください.

問. 曲面でのベクトルの向きがよくわからなくなります.

答. 曲面の接ベクトルの方向は “３６０ °” ぐるりとあります.

問. パラメータの数はどうようにして決まるのでしょうか？また，曲線のパラメータは物理的には “時間” と考えることができましたが，曲面の２つのパラメータは何を表すと考えられますか？

答. どう決まるか，というか，パラメータ１つの場合は曲線，２つの場合は曲面というのが慣習です．パラメータの意味とは関係ありません．曲線のパラメータが (運動学との関係で) 時間を意味する場合もあれば，曲線の長さ自体をパラメータにとることもあります (弧長パラメータ)．ともかく，パラメータが時間であるかないかは数学には関係ありません．曲面のパラメータは，身長と体重かもしれないし，気圧と温度かもしれないし，価格と在庫数かもしれないし (この場合は厳密には離散パラメータ)... ともかく，パラメータが何であるかは定式化には関係ありません．(応用するときに気にするだけです).

問. いくつかの点が同一平面にあるかないかを考えるとき，符号付き体積の判定が使えますか？

答. ３次元空間の中の４点については使えます．それ以外は使えません．たとえば３次元空間の中の３点なら，確かに，いつも同一平面上にあります．５点以上なら，行列の階数の計算を応用します.

問. p.25 の (1.1), (1.2) の証明がわかりません．p.189 の付録のところにある証明で「１次変換」というのはつまり「線形写像」であるということですか？４行目以下は全く理解できませんでした．わかりやすく説明してください.

答. １次変換は線形写像のことです．テキストの付録の証明は，外積の幾何的な意味を使った説明です．ちなみに，代数的には，p.25 の (1.1), (1.2) はただ簡単な計算で確かめられることがらです．(たぶん既習だと思います).

問. $n \geq 4$ の場合，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を極座標で表すことは可能ですか？// ４次元以上の場合でも極座標をとることがあるのですか？

答. 極座標とは何かが明確ではないので，答えられませんが，可能でないと言えます．$n = 3$ のときも $n = 2$ のときのような極座標に該当するものがありません．球座標 (球面座標) は，”北極” と” 南極” の部分では座標にはなりません.

問. 大学に入学してから，数ベクトルからベクトル空間の元としてのベクトルに抽象化しました．でもこの講義で使っているベクトルは高校まで扱っていた数ベクトルです．講義名は「ベクトル解析」だから，序論 A でやったベクトル空間の延長だと思っていたのですが...

答. 延長ではなく融合です．何と何との融合かというと，線形代数と微分積分の融合です．ところで，なぜ線形代数でベクトル空間の元としてベクトルを抽象化したかというと，そうすることによってベクトルをより良く使いこなすようになるためです．(抽象化することが最終目的ではない)．そして，それは，たとえば，曲線の接線，曲面の接平面 (さらに，より一般に多様体の接ベクトル空間) に見事に活用されます.

問. $\sum_{j=0}^{N-1} e^{\frac{j}{N}} = \dfrac{(e^{\frac{1}{N}})^N - 1}{e^{\frac{1}{N}} - 1}$ がわかりません.

答. 等比級数の和公式を使っています．$1 + r + r^2 + \cdots + r^{N-1} = \dfrac{r^N - 1}{r - 1}$ という公式です．それから $e^{\frac{j}{N}} = (e^{\frac{1}{N}})^j$ に注意しましょう.

問. パラメータ表示された曲面の単位法線ベクトルの具体的な求め方がよく分かりませんでした.

答. 教科書に説明があります．もう一度読んでみてください.

問. 外積を用いる利点はどこにありますか？

答. 法線ベクトルを計算できることです.

問. 外積は４次元以上になると，どのような役割を持ちますか？// 「外積」は４次元以上の空間を考えるときに見たことがありません．// 外積が重要となる分野はあるのでしょうか？

答. 外積は内積と並んで，どんな分野でも常識の範囲です．ところで，何次元であっても，外積は考えられます．その上で，３次元の場合だけ特殊である，ということです．実は「ベクトル空間の外積」という話があって，それは何次元でも考えられるのですが，３次元の場合は $\mathbf{R}^3$ と $\mathbf{R}^3$ の外積が３次元になり，たまたま，$\mathbf{R}^3$ と同一視できる，という意味で３次元が特殊です．($\mathbf{R}^n$ と $\mathbf{R}^n$ の外積は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次元).

問. 位置ベクトルと速度ベクトルが直交しているのは円運動に限りますか？

答. なるほど．その通りですね．なぜなら，条件から $\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t) = 0$ なので，$(\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t))' = 2(\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}'(t)) = 0$ なので，$|\boldsymbol{r}(t)|$ は定数です．したがって，円運動 (か静止) に限られます.

問. リーマン積分で不連続な点が無限にある関数はどこまで積分できるのでしょうか？たかだか可算無限個の点で不連続ならばリーマン積分可能であるといえるのでしょうか？

答. 不連続な点が無限にある関数は，ルベーグ積分と呼ばれるもので扱うのが自然です．(たかだか可算個の点で不連続であってもリーマン積分可能とは限りません．有限個の点で不連続であっても有界でなければリーマン積分可能とは限りません).

問. “作用素” とはなんですか？このようなことを考えるからには何か利点があるのですか？

答. ”雪の素” ならぬ” 作用の素” です.「作用させる」という操作自体を抽出した概念です．話を単純化できるなどのたくさん利点があります．これから学習が進んでいくとその利点が実感できてくると思います.

問. ベクトル解析は３よりも大きい次元の場合はどうなるのですか？// ベクトル解析という学問はどういう部門で使われているのですか？// ベクトル解析は数学ではどのような使われ方をされていますか？

答. ベクトル解析は，３次元より大きな場合でもほぼ同じように展開できます．ベクトル解析はあらゆる部門で重要であり有用です．ベクトル解析が使いこなせることは大切な基礎です．この講義は数学序論 E ですが，序論は助走です．跳躍するための助走です．数学助走 E です．だから，今のうちに基礎体力をつけて，あとで高く跳べるようにしておきましょう.

問. レポートの提出期限を水曜 12:00 ではなく，次回の授業のときにしてほしいです.

答. 授業のときに提出すればよいことにしてしまうと，授業中に一生懸命レポートを書いて提出する人がいないとも限らず，そうすると，その人はその授業に出ていながら，その授業内容を理解するために作られたレポートを解くことで，かえってその授業が理解できなくなる，という皮肉な結果となってしまって，本当に取り返しのつかない事態になります．それではいけないので，そんな事態を避けるために永年の経験からあみ出されたレポート提出期限なので，皆さん従ってください.

ではよろしく.