

数学概論 A(ベクトル解析) 質問の回答 担当教官 石川 剛郎(いしかわ ごうお)

No. 9 (2001年6月26日) の分

問. $\iint_S (b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge dx + b_3 dx \wedge dy) = \iiint \left(\frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} + \frac{\partial b_3}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz$ となる過程がよくわからなかったのので、その過程を説明してほしいです。

答. こんにちは. 7月10日は出張のため残念ながら休講です. また, 7月17日がこの講義の最終回(千秋楽)となります. そのときに, 2回目(最後)の小テスト(40分)を実施します. 計算問題とは限らず, 総合的な問題を出題します. 持ち込み自由で, カンニング禁止です. さて回答ですが, これはガウスの発散定理と等価です. これから講義で説明します.

問. Gauss の発散定理 $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS} = \iiint \operatorname{div} \mathbf{v} dx dy dz$ において, $S = \partial V$ だし, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS}$ は微分2形式になり, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS}$ は微分3形式になるので, 結局は, ストークスの定理 $\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$ と同じことを言っているような気がします, どのようなのでしょうか?

答. そういう意図です.

問. ガウスの発散定理は, V が \mathbb{R}^n 内の領域としても成り立ちますか?

答. ストークスの定理という形で成り立ちます.

問. 一般の微分形式に対しても同じように積分が定義されると思うのですが, $\omega = \sum_i f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ に対し, $\int_S \omega := \int \sum_i f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_p})}{\partial(u_1, \dots, u_p)} du_1 \dots du_p$ でしょうか?

答. まったく, その通りです.

問. ガウスの定理の左辺 $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS}$ の物理的な意味は, 曲面 S を単位時間に流れる水の量, とありますが, どうしてですか? S に垂直に出る水の量だけですか? なぜ, 速度ベクトルと法線ベクトルの内積を2回積分したものが, 単位時間あたりの流出量なのですか? $\iint_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{ndS}$ が S を単位時間に流れ出る水の量というのがわかりません.

答. では, 以前教えてもらった, 車の流れでたとえてみましょう. 4車線, 2階立ての道路を多くの自動車が一一定の間隔, 一定のスピードで走っているとしましょう. その流れをその道路の横に立って, 道路に垂直な面で量っても, 斜めに観察しても, 単位時間に通過する車の量は等しいですね. 斜めに量ると, 速度は小さく見え, 量る面の面積は増えます. 見かけの速度が $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ です. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ は, \mathbf{v} の \mathbf{n} 方向の成分です. それをより広い S 上で積分することになり, 積分すれば等しくなる, ということです.

問. 物理で出てくるガウスの法則と, ガウスの発散定理は関係があるのでしょうか? ガウスだけが関係するのでしょうか? 物理で出てくるガウスの法則は, 閉曲面の中の電荷を積分したと思います.

答. ガウスの発散定理を用いて, 物理で出てくるガウスの法則が導かれるという関係にあります.

問. ストークスの定理は定義ではないのですか? 今まで一変数関数の積分を計算するとき, あたりまえのように, $\int_a^b F'(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ という式を用いていました. すり込みですか?

答. 定義ではありません. 定理です. しかも大切な定理です. 大切すぎて, 空気のように当たり前に思っていただけだと思います. すり込みです. ところで, 皆さんは気がついていないかもしれませんが, 「積分」には, 2つの種類があります. 「定積分」と「不定積分」の2つです. $\int_a^b F'(x) dx$ は $F'(x)$ の定積分です. 定積分は長さとか面積などの意味あいのある概念で, もともと微分とは関係ありませんでした. その定積分が, 微分の逆演算としての「不定積分」で計算できる, ということを主張しているのが「微分積分学の基本定理」であるわけです. 今度からは, 感謝しながら使ってください.

問. $\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$ とありましたが, \int と d が組み合わさっていなくてもよいのですか?

答. α は微分形式なので, dx などがすでにそこに入っているわけです. α が微分0形式(関数)の場合には, 「積分」は, 単に有限個の点での値を(符号を付けて)加えるという意味になります. 普通の積分 $\int_a^b f(x) dx$ は, 実は関数 $f(x)$ の積分ではなく, 微分1形式 $f(x) dx$ の積分と考えた方が自然なのです.

問. 微分形式とは結局何ものなのですか?

答. $\omega = \sum_i f_{i_1 \dots i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$ という形式です. ベクトルをいくつか入力すると, 数値を出す形式(思考装置, 思考機械)です.

問. 微分形式というものは物理において役に立つのでしょうか?

答. 役に立ちます. というより, 微分形式は, 物理学から生まれたと言えます. 現代物理, とくに理論物理学を学ぼうと思ったら, 微分形式を知らないとい困ると思います.

問. 曲面の面積要素 $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$ は何か他の式から導かれるものではないのですか?

答. 定義です.

問． dS (曲面の面積要素) と曲面の面積の関係はどうなっているのでしょうか？

答．面積要素を，曲面上で積分すると，曲面の面積になります．

問．曲面の第1基本形式の意味がよくわかりません．曲面の第1基本形式は何を意味するのでしょうか？

答．曲面上の曲線の長さを与える形式です．曲面をパラメータ (u, v) で表すということは，曲面の地図を uv -平面に描いているとも言えますが，その「縮尺」が「第1基本形式」です．

問．第1基本形式について，なぜ「長さの要素」というものがあらわれるのですか？ r 上の曲線の長さと考えるところででしょうか？ $r(t) = r(u(t), v(t))$ とおくと， $\frac{dr}{dt} \cdot \frac{dr}{dt} = \left(r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt} \right) \left(r_u \frac{du}{dt} + r_v \frac{dv}{dt} \right) = r_u \cdot r_u \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2r_u \cdot r_v \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + r_v \cdot r_v \left(\frac{dv}{dt} \right)^2$ となり，長さの要素という感じもするのですが．

答．まったくその通りです．

問． $dr = r_u du + r_v dv$ として $ds = \sqrt{dr \cdot dr}$ が「長さの要素」であるということは，その積分は，曲線の長さになるのですか？そのときの積分領域はどうなるのでしょうか？

答．その通りです．曲線 $(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t)))$, $a \leq t \leq b$ の長さは， $L = \int_a^b ds$ で求められます．

問．曲面の面積要素と長さの要素は同じものではないですよね？表記法に何か違いはあるのですか？

答．面積要素 dS は大文字で，長さの要素 ds は小文字です．

問． $E = r_u \cdot r_u, F = r_u \cdot r_v, G = r_v \cdot r_v$ 等には， K (ガウス曲率)， H (平均曲率) のように，個別に名前はついていないのですか？

答．ついていません．つねに1セットで，第1基本形式と呼びます．

問．球面の極座標で，北極と南極を例外にしないと，どのような点で困るのでしょうか？

答． $|r_{\theta} \times r_{\varphi}| = a \sin \theta$ となり， $\theta = 0, \pi$ のとき，0 になります．つまり，この場合は， $r_{\theta} \times r_{\varphi} = 0$ となり，北極 ($\theta = 0$) と南極 ($\theta = \pi$) では，球面の法線ベクトルとして採用できません．

問．球面の緯度を $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ とするのは地球くらいのものですか？

答．単に基準の問題なのですが，球面を表示するときは， $0 \leq \theta \leq \pi$ とした方が，式が簡単になるようです．

問．球の体積は， $\frac{4}{3}\pi r^3$ で，微分すると $4\pi r^2$ の表面積になりますが，何か関係がありますか？

答．関係があります．球が，何枚もの薄い殻からできていると考えれば，表面積を積分すると体積になるということは自然ですね．

問．回答 No.8 の「 $(df)(\mathbf{v}) = \frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2 + \frac{\partial f}{\partial z} v_3$ がベクトルの f の増加する方向の成分」というのは，どういことですか？スカラーである数値が，ベクトルの f 増加する方向の成分というはおかしいように思います．

答．ベクトルの成分はスカラーです．

問．ガウスとはどんな人ですか？ガウスとは数学者なのですか？それとも物理学者なのですか？

答．史上最大の数学者と呼ばれている人です．ガウスの時代には，数学者か物理学者という区別自体がなかったと思います．

問．数学での「自然である」という言葉について説明してください．「式が簡単な形である」ということなのか？または「理解がしやすい」ということなのか？

答．自然は単純さを好むということがあります．「単純だ」ということです．ですから，数学では「単純な理論」は良い理論です．単純だと理解しやすいので「理解しやすい理論」は良い理論です．当然，式も簡単になるでしょう．ところで「自然である」の対義語は「人工的である」です．人工的な数学の理論は，とりあえず作ったというもので，複雑で，理解しづらいものです．学問の過渡期には仕方ないですが，自然な理論になるように手入れして洗練させていかなければなりません．それはともかく，講義で説明する「ストークスの定理」は，十分に究明され，洗練された大定理の多くと同様，つぎの三つの特徴をもっています：1. それは当たり前のことである．2. そこに現われる諸概念がきちんとうまく定義された瞬間にそれは当たり前のことになった．3. それから重大な結果が出る．こんな定理を発見してみたいものですね．この道の他にいく道なし．行けばわかるさ，やればできるさ．ではまた．