数学概論 A(ベクトル解析) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 8 (２００１年６月１９日) の分

問. 関数 $f(x,y,z)$ の外微分は, $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ と定められますが, これは何を意味するのですか？

答. こんにちは. 北海道に多いまっすぐな道を猛スピードでこちらに向かっている車も (遠近感がなければ) 止まって見えます. 横から見たらすぐわかるのにね. さて回答ですが, df は, 微分 1 形式なので, 各点で, ベクトルを入力すると, 数値を出力するのですが, ベクトルの f の増加する方向の成分という数値を出力します. ベクトル $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ に対して, $(df)(\mathbf{v}) = \dfrac{\partial f}{\partial x}v_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}v_2 + \dfrac{\partial f}{\partial z}v_3$ という数値を出力します. とくに, 曲線の速度ベクトル $(\dfrac{dx}{dt}, \dfrac{dy}{dt}, \dfrac{dz}{dt})$ に対して,「f の方向微分」$\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$ を出力します. このことから, 外微分の記号も納得できると思います. ちなみに, $f(x,y,z) = x$ のとき $df = dx$ です. 何ごとにも,「もの」とそれを「計るもの」両方があるという視点が必要です.

問. $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ と, 偏微分で出てくる $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}$ は別ものなのですか？

答. 別なものですが, 関係します. すごく関係します. 最後の式は, (x,y,z) が t の関数のとき (つまり空間曲線のとき), $\dfrac{df}{dt}$ を表す公式でしたね. (連鎖律).

問. 外微分は全微分のことと言っていましたが, 単に言葉が違うのですか？

答. そうですね.「関数 (微分 0 形式) の外微分が全微分で定義される」ということです.

問. 微分 0 形式 f を外微分すると df と $\mathrm{grad}f$ が対応し, 微分 1 形式 α を外微分すると $d\alpha$ と $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ が対応し, 微分 2 形式 β を外微分すると $d\beta$ と $\mathrm{div}\mathbf{u}$ が対応するとありますが, これは, こうなるように, わさと外微分の定義をしたわけですよね. そうすると何に使えるのですか？外微分は何のためにあるのですか？

答. わざとではありません. 外微分は自然な概念です. ベクトル場の勾配, 回転, 発散が重要なのと同様に, 微分形式の外微分は重要です. しかも, 勾配, 回転, 発散の役割を一手に引き受ける, たのもしい奴です. 外微分の一番自然な登場の仕方は, 何と言っても「ストークスの定理」$\int_{\partial D} \alpha = \int_D d\alpha$ でしょうね. ここで, D は領域で, ∂D は D の境界です. α は微分形式で, $d\alpha$ は α の外微分です. $\int$ は微分形式の積分です. 微分形式の積分は, あとで説明する予定ですが, 線積分や面積分を思い浮かべてください. たとえば, $\alpha = F(x)$ (１変数関数, 微分 0 形式), $D = [a,b]$ (閉区間) のとき, α の外微分は $d\alpha = \dfrac{dF}{dx}dx$ (１変数微分 1 形式) で, D の境界は, a, b ２点からなり, ストークスの定理は, $\int_{\partial D} F(x) = \int_D \dfrac{dF}{dx}dx$ ですが, 左辺は,「２点上の積分」で, $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ と見ます. 右辺は, $\int_a^b \dfrac{dF}{dx}dx$ なので, **ストークスの定理は,「微分積分学の基本定理」を多変数に一般化した定理である**と言えます. ストークスの定理は, 領域の境界と外微分とに, 積分を経由した「双対性」があることを端的に示している, 美しい定理です. 外微分は, １９世紀の末から, ２０世紀の初めにかけて, カルタン (Cartan) 達によって洗練されてきた概念です. ところで, 数学では,「自然ですね」というのが最大の「ほめ言葉」です.「外微分がいい微分」.

問. 微分３形式の外微分はどうなるのでしょうか？$d\gamma = dc \wedge dx \wedge dy \wedge dz$ みたいにすると, $d\gamma = 0$ になるのですが, 実際のところどうなんですか？

答. 良い質問ですね. 実際のところ質問の通りです.

問. 微分 n 形式の外微分は, 微分 $(n+1)$ 形式の形になるということですか？

答. まったくその通りです.

問. 外微分 $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$ は, $M = \mathbf{R}^3$ の場合は, $\mathrm{grad}, \mathrm{rot}, \mathrm{div}$ に対応してすばらしい一致がありましたが, $M = \mathbf{R}^n$ に対して, 各々の k における外微分 d の直感的な意味付けは可能なのでしょうか？

答. 「微分形式は目に見えない」ので, 直感的な説明は難しいですね. たとえば, 微分 1 形式 $\alpha = a_1dx + a_2dy + a_3dz$ の外微分の直感的な意味を説明するため, $\mathbf{R}^3$ の曲面 $(x(t,s), y(t,s), z(t,s))$ を考え, α の t 方向の値を s 方向に微分してみます：$\dfrac{d}{ds}(a_1\dfrac{dx}{dt} + a_2\dfrac{dy}{dt} + a_3\dfrac{dz}{dt}) = \dfrac{\partial a_1}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial a_1}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial a_1}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial a_2}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial a_2}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{\partial a_3}{\partial x}\dfrac{dx}{ds}\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{\partial a_3}{\partial y}\dfrac{dy}{ds}\dfrac{dz}{dt} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}\dfrac{dz}{ds}\dfrac{dz}{dt}$. 次に, 逆に, α の s 方向の値を t 方向に微分してみます：$\dfrac{d}{dt}(a_1\dfrac{dx}{ds} + a_2\dfrac{dy}{ds} + a_3\dfrac{dz}{ds}) = \dfrac{\partial a_1}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial a_1}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial a_1}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{\partial a_2}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial a_2}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial a_2}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{\partial a_3}{\partial x}\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dz}{ds} + \dfrac{\partial a_3}{\partial y}\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dz}{ds} + \dfrac{\partial a_3}{\partial z}\dfrac{dz}{dt}\dfrac{dz}{ds}$. この２式の差 (後者マイナス前者) は, $\left(\dfrac{\partial a_3}{\partial y} - \dfrac{\partial a_2}{\partial z}\right)\left(\dfrac{dy}{dt}\dfrac{dz}{ds} - \dfrac{dz}{dt}\dfrac{dy}{ds}\right) + \left(\dfrac{\partial a_1}{\partial z} - \dfrac{\partial a_3}{\partial x}\right)\left(\dfrac{dz}{dt}\dfrac{dx}{ds} - \dfrac{dx}{dt}\dfrac{dz}{ds}\right) + \left(\dfrac{\partial a_2}{\partial x} - \dfrac{\partial a_1}{\partial y}\right)\left(\dfrac{dx}{dt}\dfrac{dy}{ds} - \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dx}{ds}\right)$ です. これが, 外微分 $d(a_1dx + a_2dy + a_3dz) = \left(\dfrac{\partial a_3}{\partial z} - \dfrac{\partial a_2}{\partial y}\right)dy \wedge dz + \left(\dfrac{\partial a_1}{\partial z} - \dfrac{\partial a_3}{\partial x}\right)dz \wedge dx + \left(\dfrac{\partial a_2}{\partial x} - \dfrac{\partial a_1}{\partial y}\right)dx \wedge dy$ の定義の意味あいです. これに比べて, 数学的な意味付けは非常に簡単で, 線形写像であって, 関数 f に対しては外微分 (全微分) df であり, $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge d\beta$ (α は微分 k 形式), $d(d\alpha) = 0$, という性質をもつ演算として, 外微分は一意的に定まります.

問. 閉 (closed) 形式と完全 (exact) 形式は, どのような状態ですか？

答. 典型的な例で説明します. 領域として, 平面上の円環領域を考えます. たとえば, $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \dfrac{1}{4} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$. ちなみに, D は単連結ではありません. 星形領域でもありません. さて, D 上の微分形式 $d\theta$ (θ

は角度) は，閉形式です．完全形式ではありません．θ の外微分として表されているから，完全形式だと錯覚するかもしれませんが，θ は D 上の関数としては定まらない (2π の整数倍の任意性のある「多価関数」で，通常の意味の関数ではありません) ので，$d\theta$ と書かれているからといって，完全形式であるとは言えません．ちなみに，$d\theta = \dfrac{-y}{x^2+y^2}dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}dy$ です．

問． ポアンカレの逆補題のところで，領域に制限をつけるにはどうすればよいのですか？

答． 星形領域という制限です．ポアンカレの逆補題が成り立つための領域の十分条件です．

問． ポアンカレの逆補題はどのように証明するのですか？

答． 領域 D 上の微分 k 形式の全体の空間を $\Omega^k(D)$ と書きます．($\Lambda^k(D)$ でもよいのですが，代数的な対象 (１点を決めたときの k 形式) と区別するために別の記号を使います)．外微分 $d = d_k : \Omega^k(D) \to \Omega^{k+1}(D)$ に対して，線形写像 $h_k : \Omega^{k+1}(D) \to \Omega^k(D)$ であって，任意の $\alpha \in \Omega^k(D)$ に対し，$(d_{k-1}h_{k-1} + h_k d_k)\alpha = \alpha$ となるものを構成します．それができたとすると，もし，α が閉形式 $d_k\alpha = 0$ ならば，$\alpha = d_{k-1}(h_{k-1}\alpha)$ となり，α は完全形式となります．h の構成のところで，領域が星形領域であることを使っています．(実は「可縮」という条件で十分)．

問． ポアンカレの補題の右辺の 0 はベクトルですか，スカラーですか？

答． ベクトルでもなく，スカラーでもなく，微分形式としての 0 です．

答． $\mathbf{R}^3$ において，dx と $dy \wedge dz$ の間には，どのような関係があるのですか？

答． 深い関係があります．$dx \wedge dy \wedge dz$ は $\mathbf{R}^3$ の標準的な体積要素と呼ばれるもので，$\mathbf{R}^3$ の体積はこれで計ります．このとき，dx と $dy \wedge dz$ は外積をとると，体積要素になるという著しい特徴があります．

問． $\mathbf{R}^3$ の交代双一次形式の全体の空間における基底と，３次交代行列の空間における基底の対応理由を教えてください．

答． 双一次形式 $F : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ には，表現行列 $A = (F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))$ が対応します．ここで，$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ は $\mathbf{R}^3$ の標準基底です．(つまり，$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$)．$F$ が交代であるのは，$F(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = -F(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$ のとき，つまり，A が交代行列であるときです．$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ の表現行列は，それぞれ，$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ です．

問． 微分２形式が $\beta = b_1 dy \wedge dz + b_2 dz \wedge dx + b_3 dx \wedge dy$ となること，微分３形式が $\gamma = c dx \wedge dy \wedge dz$ となるところがわかりません．

答． これが微分２形式と微分３形式の定義なんです．

問． $\Lambda^n(\mathbf{R}^m)^*$ の n は基底の $\wedge$ によって結合される dx_i の数，m は dx_i の種類の数ということでしょうか？

答． その通りです．

問． $dx \wedge dy \wedge dz$ はどのように定めるのですか？

答． 良い質問ですね．これは「行列式」です．つまり，$(dx \wedge dy \wedge dz)(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \det(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ が定義です．一般に，１次形式 $\varphi, \psi, \rho : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ に対して，$(\varphi \wedge \psi \wedge \rho)(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = \begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{u}) & \varphi(\mathbf{v}) & \varphi(\mathbf{w}) \\ \psi(\mathbf{u}) & \psi(\mathbf{v}) & \psi(\mathbf{w}) \\ \rho(\mathbf{u}) & \rho(\mathbf{v}) & \rho(\mathbf{w}) \end{vmatrix}$ と定義します．(４個以上でも同様)．

問． テンソルとは何ですか？

答． 双１次形式を一般化して，多重線形形式 $\mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n)^* \times \cdots \times (\mathbf{R}^n)^* \to \mathbf{R}$ を各点に対応させるものを「テンソル」と言います．ベクトル場や微分形式はテンソルの特殊なものです．

問． $\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = 0$ とありましたが，$\mathrm{rot}(\mathrm{grad} f) = \mathbf{0}$ ではないですか？

答． その通りです．

問． 「外微分」があるのなら,「内微分」もあるのですか？

答． 答えを期待されていると思うので答えます．内微分はない！

問． 「キチカン」とは何ですか？

答． 「奇置換」です．置換には偶奇があり，奇の置換のことです．

問． ポアンカレとはどんな人ですか？

答． 私 (石川) が尊敬するロシアのアーノルド先生が尊敬する２０世紀最大の数学者の一人です．多くの分野で画期的な仕事を残しました．たとえば，トポロジーを創りました．トポロジーの分野での未解決問題に「ポアンカレ予想」があります．また，岩波文庫にある「科学と仮説」「科学と方法」などの随筆でも有名ですね．

問． 「補題」と「定理」はどう違うのですか？

答． 数学的な中身の違いはありません.「補題」は「補助定理」とも呼ばれます．たまたま，何か他の定理の証明に使うために「補題」と呼ばれたものが，あとあと，重要であることが認識されるということがよくあるわけです．

問． 参考書は買ったのですが，勉強の仕方がわかりません．全てを理解するには，時間がかかってしまいそうです．

答． 勉強の仕方は，ずばり「時間をかける」ことです．石の上にも３年．時間をかければ全てを理解できるなんて，すばらしいことだと思いませんか．

問． なまけていたので，質問もできないくらい分かっていません．言葉の意味もわかりません．勉強しなおしてきます．

答． 励ましの言葉ですが,「勉強しなおす」というより,「これから勉強を始める」と考えた方が楽しいです．数学では，言葉の意味がわかること，定義を理解することが第一です．質問できるということは理解している証拠です．がんばりましょう．なまけていたのは，他にやりたいことがあって時間がなかったからだと思うので，無駄ではありませんよ．たぶんね．ということで，ではまた．