数学概論 A(ベクトル解析) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)
No. 7 (２００１年６月１２日) の分

問. $\wedge$ (ウェッジ) と $\times$ (いままでの外積の記号) には違いはないのですか？

答. こんにちは．違いがわかる人間になりたいと思いながら，ネスカフェ・ゴールドブレンドの CM を昔から (遠藤周作氏のころから) 見ています．さて，回答ですが，違いがあります．どういう違いかというと，外積することによって違う種類のものができる場合が $\wedge$ で，同じ種類のものができる場合に $\times$ を使うという違いがあります．dx や dy は１形式ですが，$dx \wedge dy$ は２形式 (あるいは双１次形式) です．外積をすると種類が変わります．一方，３次元ベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ に対して，ベクトル積 $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ は，$\mathbf{A}$ や $\mathbf{B}$ と同じ種類の３次元ベクトルでしたね．

問. $dx \wedge dy$ はどうして $dx \times dy$ と表記しないのですか？

答. 違うものだからです．区別するために別の記号を使います．

問. 今日の講義ででてきた外積とベクトルの外積は違うものなのに同じ名前なのはなぜですか？

答. 違うものですが，３次元の場合には密接に関係する (あるいは同一視できる) から同じ名前がついていると言えます．dx, dy, dz をそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と対応させ，それとは別に，$dy \wedge dz, dz \wedge dx, dx \wedge dy$ をそれぞれ $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ と対応させると，１次形式の外積が，丁度，ベクトル積に対応します．

問. dx と dy の外積 ($dx \wedge dy$) が何を意味しているのかがよくわかりません．

答. 講義では，$dx \wedge dy$ は，双１次形式 $dx \wedge dy : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ であり，$dx \wedge dy(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} dx(\mathbf{u}) & dx(\mathbf{v}) \\ dy(\mathbf{u}) & dy(\mathbf{v}) \end{vmatrix}$ と定義できると説明しましたが，$\begin{vmatrix} dx(\mathbf{u}) & dx(\mathbf{v}) \\ dy(\mathbf{u}) & dy(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = u_1 v_2 - u_2 v_1$ なので，$dx \wedge dy$ は，２つのベクトルを入力すると，２次元の場合は，その２つのベクトルの作る平行四辺形の (符号をこめた) 面積，一般には，２つのベクトルを xy 平面に射影したものの作る平行四辺形の面積を出力する「計り」です．

問. $dxdy$ と $dx \wedge dy$ は微妙に違うと，先生が説明のときに (小声で) 言っていましたが，具体的にどのような違いがあるのですか？

答. $dxdy$ と $dx \wedge dy$ 違いは，普通の面積を考えるか，符号つきの面積 (ひっくり返ったらマイナスと考えるもの) を考えるかの違いです．言い換えると，対称性と交代性の違いです．

問. 重積分での $dudv = |J| dxdy$ になるのと，$du \wedge dv = J dx \wedge dy$ との関係がよくわかりません．

答. 重積分では,「累次積分」で習ったように，x による積分と y による積分は対称であり，その順序によりません．そのために絶対値がつきます．外積では，交代性から，絶対値がつきません．

問. dx や dy というものは３次元なのですか？以前，外積は３次元でしか定義できないと説明を受けたように思いますが，dx や dy というものは，別に何次元でも良いと思うのですが，間違っていますか？

答. 間違っていません．dx や dy は何次元空間でも考えられ，その外積も，何次元空間でも考えられます．ちなみに $\mathbf{R}^n$ 上の１次形式の空間は $(\mathbf{R}^n)^*$ と書かれ，$\mathbf{R}^n$ 上の交代双１次形式の空間は $\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ と書かれます．$(\mathbf{R}^n)^*$ の次元は n で，$\Lambda^2(\mathbf{R}^n)^*$ の次元は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ です．$n = 3$ のとき，次元が一致して，２つの空間が同一視が可能となり，以前紹介したような外積 (ベクトル積) が定義できた，という仕組みです．

問. dx は無限小の記号であり，現代数学では,「x 方向の無限小変化を計るもの」であるそうですが，どういうことですか？

答. 講義で説明したように，ベクトルを入力したら，スカラーを出力する「計り」(はかり，量り？, あるいは「ものさし」) です．３次元ベクトルなら，３つの成分がありますが，その３つの数値を順番に入れると，その最初の数値，すなわちベクトルの x 成分だけを取り出して表示してくれる便利な装置です．質点の運動を例に考えると，$\mathbf{r}(t)$ という運動の無限小変化は，その速度ベクトル $\dfrac{d\mathbf{r}(t)}{dt}$ (ベクトルの微分) で表されますが，それに対して，その x 成分 $\dfrac{dx(t)}{dt}$ を対応させます．それが，dx の正体であると，現代数学では認識されています．

問. １次形式の部分で，$\varphi(\mathbf{u}) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, $dx : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ が $a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0$ となるのはなぜですか？$a_1 \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ として考えてもかまわないように思います．

答. よい質問ですね．$\varphi(\mathbf{i}) = a_1$ となる１次形式については，dx ではなく，$d(a_1 x) = a_1 dx$ がその役目を果たします．

問. 外積の条件は，距離の条件と同じように,「これを満たすものを外積としてよい」というものですか？それとも外積の定理みたいなものですか？

答. 外積というものは１つに定まります．定理の方です．

問. 外積の性質として，$dx \wedge dx = 0$ とありましたが，そもそも dx の外積とは何ですか？

答. 交代双１次形式として定義される，ということを講義で説明しました.「交代双１次形式」というのは耳慣れない言葉なので，受け入れられないかも知れませんが，$dx \wedge dx(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \begin{vmatrix} dx(\mathbf{u}) & dx(\mathbf{v}) \\ dx(\mathbf{u}) & dx(\mathbf{v}) \end{vmatrix} = 0$ がどんなベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ についても成り立つということから，$dx \wedge dy = 0$ となります．

問. dx と dy はスカラーなので，外積は取れないと思うのですが．

答. dx と dy はスカラーではありません．１次形式であり，微分形式です．

問． ベクトルで入力して，スカラーで出力とはどういうことですか？出力，入力の意味がわかりません．

答． 写像や関数という概念の説明に良く使う表現です．$y = f(x)$ の場合は，x を入力して，y を出力します．$dx \wedge dy$ の場合は，ベクトルを２つ入力して，スカラーを１つ出力します．

問． スカラー場はベクトル場に含まれていると考えてよいのでしょうか？

答． いいえ，違うものなので，完全に区別すべきです．

問． 双一次形式 F が対称でも交代でもないとき $F(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ と $F(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ はどう違うのですか？

答． 場合によります．

問． 微分形式の式 $a_1dx + a_2dy + a_3dz$ は何を意味するのですか？

答． この場合，a_1 等は，x, y, z の関数です．いま，xyz 空間の点を指定すると，この式は，１次形式 $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ を意味しますね．xyz 空間の点を変えると，係数 a_1, a_2, a_3 も変わり，１次形式も変わる．だから，いままで調べてきた「ベクトル場」と対比して命名すると,「１次形式場」と言った方が明確かもしれませんね．つまり，$a_1dx+a_2dy+a_3dz$ は１次形式場です．でも通常は，differential one-form (微分１形式) と呼ばれています．

問． 微分形式について，外積や外微分などで出てくる dx や dy を x, y 等の文字のように扱ってよいというのが他の授業で以前から出始めているのですが，その話と関係があるのですか？

答． もちろん関係があります．dx や dy が「文字」なのは当たり前なのですが,「形式」だけに「形式的」に扱おうということでしょう．そして，この講義で説明したように「１次形式」として意味づけることができる，ということです．微分形式が非常に便利な概念であることは確かです．少し難しい概念なので，ベクトル場のようにポピュラーにならないのが残念ですが，使いこなせれば役に立ちます．

問． １次元でも微分形式はあるのですか？

答． もちろんあります．$a(x)dx$ が一般形です．

問． $\varphi, \psi \in \Lambda^1(\mathbf{R}^2)$ のときの $\varphi \wedge \psi$ の意味はなんでしょうか?定義を見てみると，φ, ψ は各点に対し，１次形式 (ベクトルに対し，スカラーを定める) を定める写像 $\mathbf{R}^2 \to T^*\mathbf{R}^2$ であり，$\varphi \wedge \psi$ として，各点 p に対して，$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p\mathbf{R}^2$ に対し，$\mathbf{u}, \mathbf{v}$ の φ, ψ から導入される面積 (φ, ψ をベクトルに対してその長さを定めるととらえる) $\begin{vmatrix} \varphi(\mathbf{u}) & \varphi(\mathbf{v}) \\ \psi(\mathbf{u}) & \psi(\mathbf{v}) \end{vmatrix}$ を対応させる写像と定義できるとも思ったのですが，全然違いますね．

答． 違いません.「長さ」という言葉を広くとらえれば，その通りです．

問． 外微分とは何ですか？できれば具体的に教えてください．

答． 講義で説明しますが，関数 $f(x, y, z)$ の外微分は，$df(x, y, z) = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy + \dfrac{\partial f}{\partial z}dz$ で定義されます.「”f 方向”への無限小変化を計るもの」です．具体的に $f = x + 2y$ のときは，$df = dx + 2dy$ です．これは，ベクトルの x 成分と，y 成分の２倍を足してくれる便利な装置です．$f = x^2 - 3y$ のときは，$df = 2xdx - 3dy$ です．これは，ベクトルの x 成分に，場所の x 座標の２倍を掛けて，y 成分の 3 倍を引いてくれる便利な装置です．

問． $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ の意味がよくわかりません．

答． ヤコビアンの記号です．$\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} := \dfrac{\partial u}{\partial x}\partial v \partial y - \dfrac{\partial u}{\partial y}\partial v \partial x$ です．

問． ヤコビアン $J = \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ は何を表しているのかがわからないで使っていました．

答． 簡単に言えば，ヤコビアンは,「変数変換による面積の倍率」を表しています．たとえば，$u = 2x, v = 2y$ なら，縦横がそれぞれ２倍なので，ヤコビアンは 4 ですね．

問． $J = \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x}$ と書いたら 0 になりませんか？

答． なりません．たぶん，$\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial y}\dfrac{\partial u}{\partial x}$ と間違えているのだと思いますが…

問．「線形である」ということはどういうことですか？

答． ベクトルの和とスカラー倍を保存するということです．

問． $\mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ という写像はありますか？

答． もちろんありますよ．

問．「トーラスとはドーナツのことですか」という質問の回答の中に,「ドーナツと呼ばないのは，あんドーナツがあるから」という文がありましたが，どうも，うさんくさいです．真偽のほどはどうなのですか？

答． 気がつきましたか．(できれば「真偽のほどはドーナッツているのですか」と尋ねてほしかったですが…) 失礼しました．それはともかく，トーラスという用語が一般的である，というのは確かなので，安心してください．まあ,「食べかけのドーナツ」もあるので，やはり「トーラス」の方が紛れがないですね．しつこいですが，これが私 (石川) の説です．ところで，３次元トーラスというものがあります．知っていますか？この教室の左右の壁をはり合わせ，前後の壁をはり合わせ，天井と床をはり合わせてできる空間です．想像できますか？壁に向かってあるいていくと，壁をすり抜け，反対側の壁から出てきます．３次元ドーナツというものはないので，やはり，３次元トーラスと呼びます… 失礼しました．ではまた．