数学概論A(ベクトル解析) 質問の回答　担当教官 石川 剛郎 (いしかわ ごうお)

No. 6 (２００１年6月5日) の分

問． ベクトル場が「渦なし」とはどういうことですか？

答． こんにちは．北大祭もよさこいソーランも終わってこれから夏本番といったところですね．夏になると台風が来ますが，あれは「渦」がありますね．(すこし話が強引ですね)．さて回答ですが，単連結な領域，たとえば $\mathbf{R}^3$ 全体とか，球体の上では，ベクトル場 $\mathbf{A}$ が「渦なし」つまり $\mathrm{rot}\mathbf{A} = \mathbf{0}$ ならば，$\mathbf{A}$ は関数 (スカラー場) の勾配として表されます．そうすると，ベクトル $\mathbf{A}$ は等高面に垂直は方向を向いているので，渦はない，ということです．ただし,「渦」というのは，通常は「局所的な」(local な) 概念ではないので，$\mathrm{rot}\mathbf{A}$ という微分の計算でそれがわかると考えるのは不自然なので,「回転なし」と表現した方が，より実感にあうかも知れませんが，慣用句なので「渦なし」という言葉を使っています．

問． 単連結の定義がよくわかりません．

答． まず厳密な定義を述べておくと,「$\mathbf{R}^3$ の領域 D が単連結 $\Leftrightarrow$ 任意の連続曲線 $\ell : [0,1] \to D$ ただし $\ell(0) = \ell(1)$ となるものに対して，連続曲面 $H : [0.1] \times [0,1] \to D$ が存在して，任意の t, s ただし $0 \le t \le 1, 0 \le s \le 1$ に対し，$H(t,0) = \ell(t), H(0,s) = H(1,s), H(t,1) = \ell(0)$ を満たす」です．言い換えると,「D 内の任意の閉じた曲線が，D の中で，連続的に１点に縮められる」ということです．上の定義では，t が閉じた曲線のパラメーターで，s はその曲線を変形するパラメーターです．

問． 「単連結」がよくわかりませんでした．例として他の形もあげてほしいです．

答． 中身の詰まった球体，ゆで玉子の白身 (厚味のある球面) が単連結の例です．ゆで玉子の白身が単連結なのは，想像しづらいかもしれませんが，皆さんが白身の中に入って，黄身をヒモでギュッと縛ることを考えると，それがスルリと抜けてしまうことから実感できると思います．あるいは，本質的に同様の事実ですが，夏にスイカを買ったとして，それをどうやって運ぶか．ヒモが１本でスイカを結んでも安定しませんね．そのヒモを網のようにして，２次元的に包まなければ運びづらくてしようがありません．他に単連結な例を挙げると，たとえば，黄身が離れて２つあるゆで玉子の白身 (球形の空洞が２つある球体)，黄身が離れて３つあるゆで玉子の白身 (球形空洞が３つある球体),... や，$\mathbf{R}^3$ でいくつかある球体の外側の領域などです．

問． なぜ $\mathbf{v} = \mathrm{grad}f$ と表される条件に,「領域が単連結である」があるのですか？

答． ポテンシャル f を構成するには，通常は「線積分」を使います．$\mathbf{v}$ を線積分して，関数 f を作るのですが，その線積分するときのルートによって，f の値が定まるかどうか，が問題になります．単連結でないと，一般に f は「多価関数」になってしまいます．つまり，線積分するルートによって f の値が違ってしまう．単連結なら，２つのルートについて，その間に膜が張れて，それに沿ってルートを移動していったとき，条件 $\mathrm{rot}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ から，線積分の値が変化しないということがわかって，一価関数として f が定まります．

問． $\mathbf{R}^n, \emptyset$ は単連結なのですか？

答． 単連結です．($\emptyset$ については通常あまり考えませんが，定義をあてはめると，閉曲線自体が存在しないので，単連結ということになります)．

問． 中身のつまったトーラスが単連結でない理由がはっきりわかりません．

答． 連続的に１点に縮められないような閉曲線が存在するからです．

問． トーラスとはドーナツのことですか？

答． そうです．ふつうは，ドーナツの表面の形を「トーラス」と呼びます．では，なぜそれをトーラスとよんで，ドーナツと呼ばないか，それは「あんドーナツ」の存在があるからです．通常「あんドーナツ」にはあんこが入れづらいから穴があいていないので，その表面は球面になってしまうからです．

問． $\mathbf{v} = -\mathrm{grad}f$ はなぜマイナスをつけるのですか？

答． 以前も言ったように，通常，ポテンシャルの高いほうから低い方へベクトルが向くと考える慣習 g あるので，マイナスをつけます．数学的に言えば，f の存在に関しては，マイナスがあるかどうかは無関係です．

問． 星型領域の厳密な定義を教えてください．自分なりに定義を考えてみたのですが，領域 D が星型領域 $\Leftrightarrow \exists a \in D, \forall \in D, 0 \le \theta \le 1; \theta a + (1-\theta)x \in D$ でどうでしょうか？

答． その通りです．θ の任意性を詳しく書けば，$\Leftrightarrow \exists a \in D, \forall \in D, \forall \theta \in [0,1]; \theta a + (1-\theta)x \in D$ としても良いですね．

問． ２次元ベッチ数とは何ですか？

答． 厳密に説明するのには「ホモロジー群」という概念がどうしても必要になるのですが，直感的に説明すると，部分領域の境界になっていないような曲面のうちで「独立」なものの個数です．ゆで玉子の白身の２次元ベッチ数は１です．表面の球面が部分領域の境界になっていないものを代表しています．ちなみにベッチ (Betti) は数学者の名前です．

問． $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ と $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\mathbf{A})=0$ から $\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ と表すことができるとしてよいのでしょうか？

答． だめです．たとえば，零ベクトルからなるベクトル場 $\mathbf{0}$ について，$\mathrm{div}\mathbf{0}=0$ ですが，$\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ と $\mathrm{div}\mathbf{0}=0$ から $\mathbf{B}=\mathbf{0}$ と表すことはできませんね．

問． ベクトルポテンシャルとは物理的にはどういったものですか？

答． 物理といえば，やはり電磁気学でよく使います．たとえば，真空の電磁場に関するマックスウェルの方程式の１つ $\mathrm{div}\mathbf{B}=0$ ($\mathbf{B}$ は磁束密度) から，$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ と表して議論することがあります．くわしくは電磁気学の教科書を御覧ください．

問． ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を求めるには，$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ から考えなくてはならないのですか？

答． ベクトルポテンシャルを求めるのは一般に難しい問題です．積分などを作って構成することが多いようです．

問． 渦なし場をつくるのは $\mathrm{grad}f$ という関数だけなのですか？発散なし場も $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ だけですか？

答． 講義で説明したように，領域に制限をつければ，そうです．

問． ヘルムホルツの定理のイメージはどんなものですか？

答． 次の質問を参考にしてください．

問． ヘルムホルツの定理について,「任意のベクトル場は渦なしの部分と，発散なしの部分の和の形に表すことが出来る」と理解したいのですが，如何でしょうか？

答． その通りです．

問． ヘルムホルツの定理の証明がよくわかりません．

答． $\mathbf{B}$ を任意のベクトル場としますね．(領域は $\mathbf{R}^3$ の閉曲面で囲まれた星型領域)．その $\mathbf{B}$ に対し，$\varphi=\mathrm{div}\mathbf{B}$ とおいて，ポアッソン方程式 $\Delta f=\varphi$ を解くわけです．その解 f について，$\mathrm{div}(\mathbf{B}-\mathrm{grad}f)=\mathrm{div}\mathbf{B}-\mathrm{div}(\mathrm{grad}f)=\varphi-\Delta f=0$ となり，$\mathbf{B}-\mathrm{grad}f=\mathrm{rot}\mathbf{A}$ となるベクトル場 $\mathbf{A}$ について，$\mathbf{B}=\mathrm{rot}\mathbf{A}+\mathrm{grad}f$ と表されるわけです．

問． 星型 $\Rightarrow$ 単連結なのですか？

答． その通りです．良いところに気がつきましたね．星型領域は「可縮」な領域であり，領域自体が１点に縮められます．したがって，その中の閉曲線も１点に縮められます．

問． ヘルムホルツの定理はどのように応用されるのですか？

答． ノーベル物理学賞を受賞した有名な物理学者のファインマンの物理教程シリーズの「電磁気学」では，ヘルムホルツの定理とは書いていないのですが，該当する結果を当たり前のように使っています．どこに使っているか探してみてください．

問． $\mathrm{rot}\mathbf{A}$ を考える領域は $\mathbf{R}^3$ に限定されるのですか？ヘルムホルツの定理で考える，閉曲面で囲まれた星型領域は $\mathbf{R}^3$ ということですか？

答． はい，$\mathbf{R}^3$ の中の領域に限って考えています．

問． ポアッソンの方程式がよくわかりません．

答． $\Delta f=\varphi$ (φ が与えられた関数，f が求める関数) という形の方程式ですが,「解ける」ということがわかっています．いろいろな分野で登場する方程式なので，昔から，解法が研究されているので，それを使いました．ではまた．